第十四届全国周培源大学生力学竞赛
（个人赛）试题参考答案及评分标准

出题学校：西南交通大学

（本试卷分为基础题和提高题两部分，满分 **120** 分，时间 **3** 小时 **30** 分钟）

评分总体原则

1. 严格根据各题的评分标准判分。
2. 如有参考答案中未给出的解法：

（1）答案完全正确，解题过程完全无误给该部分满分；

（2）答案正确，解题过程部分正确，酌情给分；

（3）答案不正确、解题过程部分正确，酌情给分，但不超过该部分分值的一半。

一、 参考答案

第一部分 基础题部分参考答案（共 60 分）

第 1 题（15 分）

（1） $b_{\min} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} h$；

（2） $q = \dfrac{3\sqrt{3}P}{4a} = \dfrac{1.299P}{a}$， $F_{Ax} = 0$， $F_{Ay} = \dfrac{19\sqrt{3}}{24} P = 1.371P$，

$M_A = \dfrac{5\sqrt{3}}{4} Pa = 2.165Pa$；

（3） $\dfrac{0.531P}{a} \le q \le \dfrac{1.024P}{a}$， $F_{Ax} = 0$， $0.561P \le F_{Ay} \le 1.081P$，

$0.885Pa \le M_A \le 1.707Pa$；

（4） $\left|M_{\max}\right| = 1.707Pa$，位于固定端 A 处右侧横截面上。

第 2 题（15 分）

（1）2；

（2） $\begin{cases} 321\ddot{\varphi} - 96\ddot{\theta} + \dfrac{4g}{r}\sin\varphi = 0 \\ -6\ddot{\varphi} + 33\ddot{\theta} + (-\dfrac{2M}{mr^2} + \dfrac{9g}{r}\sin\theta) = 0 \end{cases}$；

（3）略。

第 3 题（12 分）

（1） $F^* = \sqrt{\dfrac{81M^2}{64h^2} + \dfrac{25}{1024}{F_S}^2}$；

（2） $\sigma_{r3} = \dfrac{q}{2I_z}\sqrt{(lx - x^2)^2 y^2 + (l - 2x)^2 (\dfrac{h^2}{4} - y^2)^2}$；

（3）略。

第 4 题（18 分）

（1） $F_{\mathrm{cr}AB}=\dfrac{\pi^2 EI_{AB}}{l_{AB}^2}=36517.04\mathrm{N}$， $F_{\mathrm{cr}AH}=\dfrac{\pi^2 EI_{AH}}{l_{AH}^2}=82163.33\mathrm{N}$；

（2） $F_{\mathrm{N}AB}$=13584.24N， $F_{\mathrm{N}AH}$=23528.60N， 满足稳定性要求；

（3） $\dfrac{I_{AB}}{I_{AH}}=\sqrt{3}=1.732$ 。

第二部分 提高题部分参考答案（共 60 分）

第 5 题（30 分）

（1） $w_C=48.053(\mathrm{mm})$； $\theta_C=0.107\,(\mathrm{rad})$；

（2）F=0.026N； $w_D=166.251\mathrm{mm}$。

第 6 题（30 分）

（1） $r_{A'}=r_0+y\tan\alpha, r_{B'}=r_0-y\tan\alpha$；

（2） $F_{1y}=-(2mg\tan\alpha/b)y$；

（3） $M=mgb\psi\tan\alpha$；

（4） $\begin{cases} v_{A'x}=-(\omega\tan\alpha)y-b\dot{\psi} \\ v_{A'y}=\dot{y}-r_0\omega\psi \end{cases}$， $\begin{cases} v_{B'x}=\left(\omega\tan\alpha\right)y+b\dot{\psi} \\ v_{B'y}=\dot{y}-r_0\omega\psi \end{cases}$；

（5） $\begin{cases} F_{A'x}=\dfrac{f\tan\alpha}{r_0}y+\dfrac{fb}{r_0\omega}\dot{\psi} \\ F_{A'y}=--\dfrac{f}{r_0\omega}\dot{y}+f\psi \end{cases}$， $\begin{cases} F_{B'x}=-\dfrac{f\tan\alpha}{r_0}y-\dfrac{fb}{r_0\omega}\dot{\psi} \\ F_{B'y}=-\dfrac{f}{r_0\omega}\dot{y}+f\psi \end{cases}$；

（6） $\begin{cases} m\ddot{y}+2f(\dfrac{\dot{y}}{v_c}-\psi)+2mg\dfrac{\tan\alpha}{b}y=0 \\ J\ddot{\psi}+2fb(\dfrac{\tan\alpha}{r_0}y+\dfrac{b}{v_c}\dot{\psi})-(mgb\tan\alpha)\psi=0 \end{cases}$；

（7） $y=c_1\sin\omega_1 t+c_2\cos\omega_1 t$, $\psi=c_3e^{-\omega_2 t}+c_4e^{\omega_2 t}$ ；不收敛。

二、 解答步骤及评分标准

第 1 题（15 分）

分值	说明
0	各种解法均需画受力图，不画受力图不得分。

（1）不计各处摩擦，求物块宽度 b 的最小值 $b_{\min}$ (3 分)

当**物块宽度 b 取最小值 $b_{\min}$** 时，物块处于临界平衡状态，此时物块 C 受力图见图 1-1(a)。由 $\frac{b_{\min}}{h}=\tan\alpha=\tan 30^{\circ}$，得 $b_{\min}=\frac{\sqrt{3}}{3}h$。

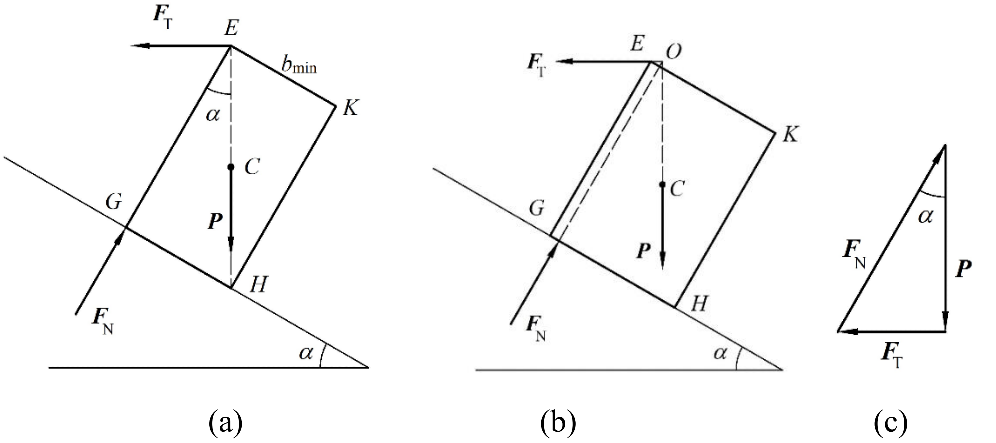


图 1-1

分值	说明
3	受力图 2 分，分析及答案 1 分。 也可采用列平衡方程的方法求解，评分同上。

（2）不计各处摩擦，当 $b\geq b_{\min}$，求荷载集度 q 的大小及固定端的约束力（4 分）

① 当 $b\geq b_{\min}$，画物块 C 受力图，见图 1-1(b)。由图 1-1(c)中的力三角形可知，$F_T=P\tan 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{3}P$。取 BD，画受力图，如图 1-2(a)，$F_D=F_T$，$F_1=\frac{2}{3}qa, F_2=\frac{1}{6}qa$，列平衡方程

$$\begin{aligned}&\sum M_B(\boldsymbol{F})=0,\quad F_D\cdot a-F_1\cdot\frac{a}{2}-F_2\cdot\frac{2a}{3}=0,\\ &F_D=\frac{4}{9}qa,\quad q=\frac{9}{4a}\times\frac{\sqrt{3}}{3}P=\frac{3\sqrt{3}P}{4a}=\frac{1.299P}{a}\end{aligned}\qquad(1)$$

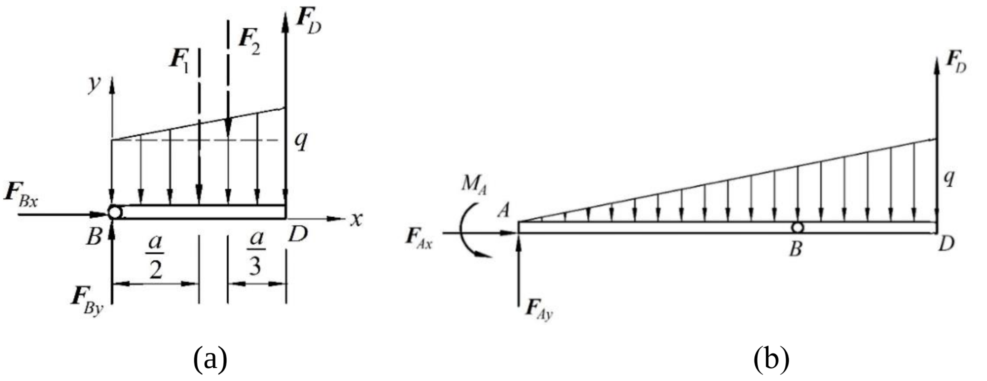


图 1-2

② 取 ABD，画受力图，见图 1-2(b)，列平衡方程

$$\sum F_x = 0, \quad F_{Ax} = 0 \tag{2}$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_{Ay} - \frac{1}{2}q \times 3a + F_D = 0,$$
$$F_{Ay} = \frac{3}{2}qa - F_D = \frac{19}{18}qa = \frac{19\sqrt{3}}{24}P = 1.371P \tag{3}$$

$$\sum M_A(\boldsymbol{F}) = 0, \quad M_A - \frac{1}{2}q \cdot 3a \cdot 2a + 3aF_{\mathrm{D}} = 0,$$
$$M_A = 3qa^2 - 3aF_{\mathrm{D}} = \frac{5}{3}qa^2 = \frac{5\sqrt{3}}{4}Pa = 2.165Pa \tag{4}$$

分值	说明
4	1）受力图 1 分，方程及答案 1 分，小计 2 分； 2）取 ABD 受力图 1 分，方程及答案 1 分，小计 2 分。

(3) 设物块与斜面之间的静摩擦因数 $f_{\mathrm{s}} = 0.3$，$b = h/3$，其余各处摩擦不计。分别求荷载集度 q 的范围、固定端约束力的范围（5 分）

解法一：

物块 C 可能的临界状态有：上滑临界、下滑临界、绕点 G 上翻、绕点 H 下翻，共 4 种情况。分别画出受力图，如图 1-3。

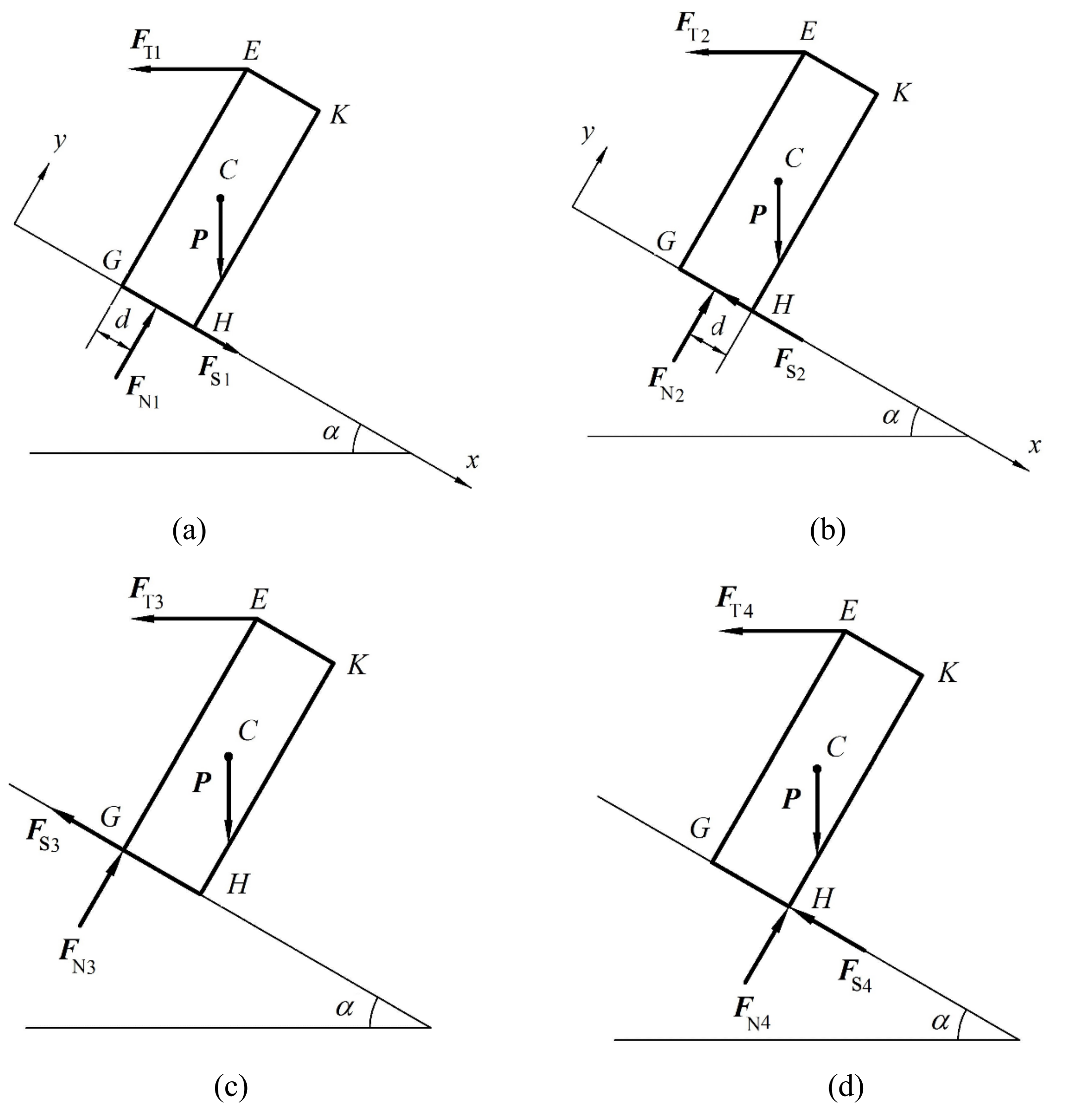


图 1-3

假设物块 C 处于上滑临界状态，画受力图，见图 1-3(a)，列平衡方程

$$\sum F_x = 0,\quad P\sin\alpha - F_{T1}\cos\alpha + F_{s1} = 0,\qquad F_{s1} = F_{T1}\cos\alpha - P\sin\alpha$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{N1} - P\cos\alpha - F_{T1}\sin\alpha = 0,\qquad F_{N1} = P\cos\alpha + F_{T1}\sin\alpha$$

补充方程 $F_{s1}=f_s F_{N1}$ ，可得

$$F_{T1}=\frac{P(\sin\alpha + f_s\cos\alpha)}{\cos\alpha - f_s\sin\alpha}=\frac{P(\sin 30^\circ + 0.3\cos 30^\circ)}{\cos 30^\circ - 0.3\sin 30^\circ}=1.061P \tag{5}$$

假设物块 C 处于下滑临界状态，画受力图，见图 1-3(b)，列平衡方程

$$\sum F_x = 0,\quad P\sin\alpha - F_{T2}\cos\alpha - F_{s2} = 0,\qquad F_{s2} = P\sin\alpha - F_{T2}\cos\alpha$$

$$\sum F_y = 0,\quad F_{N2} - P\cos\alpha - F_{T2}\sin\alpha = 0,\qquad F_{N2} = P\cos\alpha + F_{T2}\sin\alpha$$

补充方程 $F_{s2}=f_s F_{N2}$ ，可得

$$F_{\mathrm{T2}}=\frac{P(\sin\alpha-f_{\mathrm{s}}\cos\alpha)}{\cos\alpha+f_{\mathrm{s}}\sin\alpha}=\frac{P(\sin30^{\circ}-0.3\cos30^{\circ})}{\cos30^{\circ}+0.3\sin30^{\circ}}=0.236P \tag{6}$$

物块 $\boldsymbol{C}$ 不滑动，力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ 的范围： $0.236P\le F_{\mathrm{T}}\le1.061P$

假设物块 C 处于绕点 G 上翻的临界状态，受力图见图 1-3(c)，列平衡方程

$$\begin{gathered}\sum M_G(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{\mathrm{T3}}\cos\alpha\cdot h-P\sin\alpha\cdot\frac{h}{2}-P\cos\alpha\cdot\frac{b}{2}=0\\ F_{\mathrm{T3}}=\frac{P}{2}\tan\alpha+\frac{P}{6}=\frac{P}{2}\tan30^{\circ}+\frac{P}{6}=0.455P\end{gathered} \tag{7}$$

假设物块 C 处于绕点 H 下翻的临界状态，受力图见图 1-3(d)，列平衡方程

$$\sum M_H(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{\mathrm{T4}}\cos\alpha\cdot h+F_{\mathrm{T4}}\sin\alpha\cdot b+P\cos\alpha\cdot\frac{b}{2}-P\sin\alpha\cdot\frac{h}{2}=0$$

$$F_{\mathrm{T4}}=\frac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{6\cos\alpha+2\sin\alpha}P=\frac{3\sin30^{\circ}-\cos30^{\circ}}{6\cos30^{\circ}+2\sin30^{\circ}}P=0.102P$$

物块 $\boldsymbol{C}$ 不翻倒，力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ 的范围： $0.102P\le F_{\mathrm{T}}\le0.455P$

物块 $\boldsymbol{C}$ 保持平衡（既不滑动也不翻倒）时， $0.236P\le F_{\mathrm{T}}\le0.455P$ (8)

由式(1) 可知：$q=\frac{9}{4}\cdot\frac{F_{\mathrm{T}}}{a}$,则平衡时 q 的范围：

$$\frac{0.531P}{a}\le q\le\frac{1.024P}{a} \tag{9}$$

由式(2)、(3)及(4)可知：$F_{Ax}=0$，$F_{Ay}=\frac{19}{18}qa$，$M_A=\frac{5}{3}qa^2$，代入式(9)可得平衡时 A 处约束力的范围：

$$0.561P\le F_{Ay}\le1.081P,\quad 0.885Pa\le M_A\le1.707Pa \tag{10}$$

解法二：

求解考虑摩擦时物块的平衡问题，力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ 的值是一个范围，F_{Tmax} 在上滑与绕点 G 上翻的两种临界状态中选取，F_{Tmin} 在下滑与绕点 H 下翻的两种临界状态中选取。采用先假设，再校核的方法。

假设物块 C 处于上滑临界状态，未上翻，受力图见图 1-3(a), 由式(5)可知：$F_{\mathrm{T1}}=1.061P$, 则 $F_{\mathrm{N1}}=P\cos30^{\circ}+1.061P\sin30^{\circ}=1.397P$

$$\sum M_G(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{\mathrm{N1}}\cdot d+F_{\mathrm{T1}}\cos\alpha\cdot h-P\sin\alpha\cdot\frac{h}{2}-P\cos\alpha\cdot\frac{b}{2}=0$$

$$d=\frac{P\sin30^\circ\cdot\frac{3b}{2}+P\cos30^\circ\cdot\frac{b}{2}-1.061P\cos30^\circ\cdot3b}{F_{\mathrm{N1}}}=-\frac{1.574b}{1.397}$$

由于 d<0, 因此上滑不可能，力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ 的最大值由绕点 G 翻倒的临界状态确定，受力图见图 1-3(c)。由式(7)可知 $F_{\mathrm{T3}}=0.455P$，即 $F_{\mathrm{Tmax}}=0.455P$。

假设物块 C 处于下滑临界状态，未下翻，受力图见图 1-3(b)，由式(6)可知 $F_{\mathrm{T2}}=0.236P$，则 $F_{\mathrm{N2}}=P\cos30^\circ+0.236P\sin30^\circ=0.984P$,列平衡方程

$$\sum M_H(\boldsymbol{F})=0,\quad F_{\mathrm{T2}}\cos\alpha\cdot h+F_{\mathrm{T2}}\sin\alpha\cdot b+P\cos\alpha\cdot\frac{b}{2}-P\sin\alpha\cdot\frac{h}{2}-F_{\mathrm{N2}}\cdot d=0$$

$$d=\frac{0.236P\cos30^\circ\cdot3b+0.236P\sin30^\circ\cdot b+P\cos30^\circ\cdot\frac{b}{2}-P\sin30^\circ\cdot\frac{3b}{2}}{F_{\mathrm{N2}}}=\frac{0.414b}{0.984}$$

由于 d>0, 假设成立，力 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{T}}$ 的最小值在下滑临界状态取值，即 $F_{\mathrm{Tmin}}=0.236P$，因此物块 C 保持平衡（**既不滑动也不翻倒**）时，$0.236P\le F_{\mathrm{T}}\le0.455P$

由式(9)、(10)可知：

$\frac{0.531P}{a}\le q\le\frac{1.024P}{a}$， $0.561P\le F_{Ay}\le1.081P$， $0.885Pa\le M_A\le1.707Pa$ 。

分值	说明
5	1）解法一：画受力图 2 分，列方程 2 分，答案 1 分； 2）解法二：画受力图 2 分，列方程 2 分，答案 1 分。

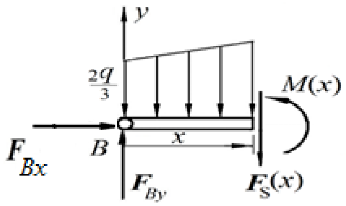
（4）由（3）的荷载集度最大值 $q_{\max}$ 求组合梁最大弯矩值(3 分)。

分析含铰链 B 的组合梁 ABD 时，可将其在 B 处拆开，以研究各梁的受力，受力图见图 1-4。分别确定两段梁的弯矩最大值，即可确定组合梁的最大弯矩值及所在的横截面位置。

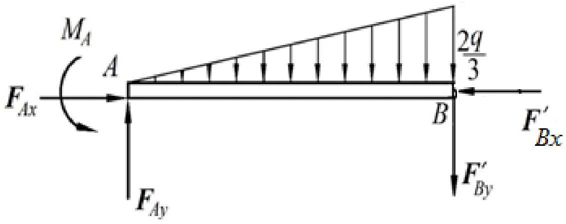
由图 1-2(a)，列平衡方程 $\sum F_x=0,\quad F_{Bx}=0$

$$\sum F_y=0,\quad F_{By}+F_D-\frac{2}{3}qa-\frac{1}{2}a\cdot\frac{q}{3}=0,$$

由式（1）$F_D=\frac{4}{9}qa$， 得 $F_{By}=\frac{7}{18}qa$



(a)



(b)

图 1-4

将梁 BD 在 x 处截开，画受力图，见图 1-4(a)，列平衡方程

$$\sum F_y = 0,\quad F_{By} - \frac{2}{3}qx - \frac{1}{2}x \cdot \frac{qx}{3a} - F_{\mathrm{S}}(x) = 0$$

$$F_{\mathrm{S}}(x) = \frac{7}{18}qa - \frac{2}{3}qx - \frac{qx^2}{6a}$$

$$\sum M_B(\boldsymbol{F}) = 0,\quad M(x) - F_{\mathrm{S}}(x) \cdot x - \frac{2}{3}qx \cdot \frac{x}{2} - \frac{1}{2}x \cdot \frac{qx}{3a} \cdot \frac{2x}{3} = 0$$

$$M(x) = \frac{7}{18}qax - \frac{1}{3}qx^2 - \frac{qx^3}{18a}$$

当剪力为零时，弯矩在该处为极值。

令 $F_{\mathrm{s}}(x) = 0$, 即 $\dfrac{7}{18}qa - \dfrac{2}{3}qx - \dfrac{qx^2}{6a}=0$， 取正根，$x = 0.5166a$

得 $M_{1\max} = \dfrac{7}{18}qax - \dfrac{1}{3}qx^2 - \dfrac{qx^3}{18a} = 0.104qa^2$

由受力图 1-4(b), 可知 AB 段最大弯矩在固定端 A 处右侧横截面上，根据式(4)可知：

$$M_A = \frac{5}{3}qa^2,\quad \text{则}\quad M_{2\max} = -\frac{5}{3}qa^2 \quad \text{即}\quad |M_{\max}| = \frac{5}{3}qa^2\text{。}$$

由式(9)可知:

$q_{\max} = \dfrac{1.024P}{a}$， 当荷载集度$q$取最大值时，有$|M_{\max}| = 1.707Pa$ 。

分值	说明
3	受力图 1 分，方程及答案 2 分。

第 2 题 (15 分)

（1）系统自由度（2 分）

2 个自由度（2 分）

（2）系统运动微分方程(共 8 分)

解法一：动力学普遍方程

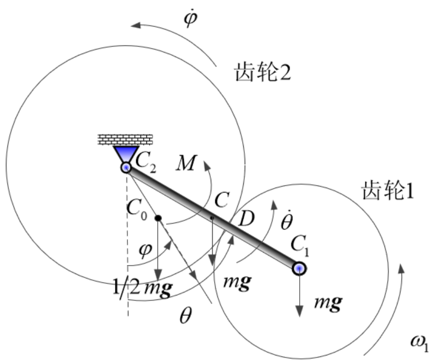


图 2-2-1

如图 2-2-1，取齿轮 2 转角φ和曲柄转角θ为广义坐标，角速度分别是$\dot{\varphi}$和$\dot{\theta}$，而齿轮 1 的角速度为（1 分）

$$\omega_1=\frac{(R+r)\dot{\theta}-R\dot{\varphi}}{r}=(1+\frac{R}{r})\dot{\theta}-\frac{R}{r}\dot{\varphi}=3\dot{\theta}-2\dot{\varphi} \tag{2-2-1}$$

齿轮 1 的角加速度为（1 分）

$$\alpha_1=(1+\frac{R}{r})\ddot{\theta}-\frac{R}{r}\ddot{\varphi}=3\ddot{\theta}-2\ddot{\varphi} \tag{2-2-2}$$

齿轮 1 和曲柄的质心加速度，以及集中质量的加速度如图 2-2-2(a)所示，附加惯性力和惯性力偶如图 2-2-2(b)。（加惯性力：1 分；惯性力偶：1 分）

如图 2-2-2(c)和(d)，分别给两组相互独立的虚位移$\delta\varphi\neq 0$、$\delta\theta=0$和$\delta\varphi=0$、$\delta\theta\neq 0$，运用动力学普遍方程,可得（1 分）

$$\begin{aligned}&-(\frac{1}{2}m)(\frac{1}{4}r\ddot{\varphi})(\frac{1}{4}r\delta\varphi)-(\frac{1}{2}mg\sin\varphi)(\frac{1}{4}r\delta\varphi)\\&+\frac{1}{2}mr^2(3\ddot{\theta}-2\ddot{\varphi})(2\delta\varphi)-\frac{1}{2}(4m)(2r)^2\ddot{\varphi}(\delta\varphi)=0\end{aligned} \tag{2-2-3}$$

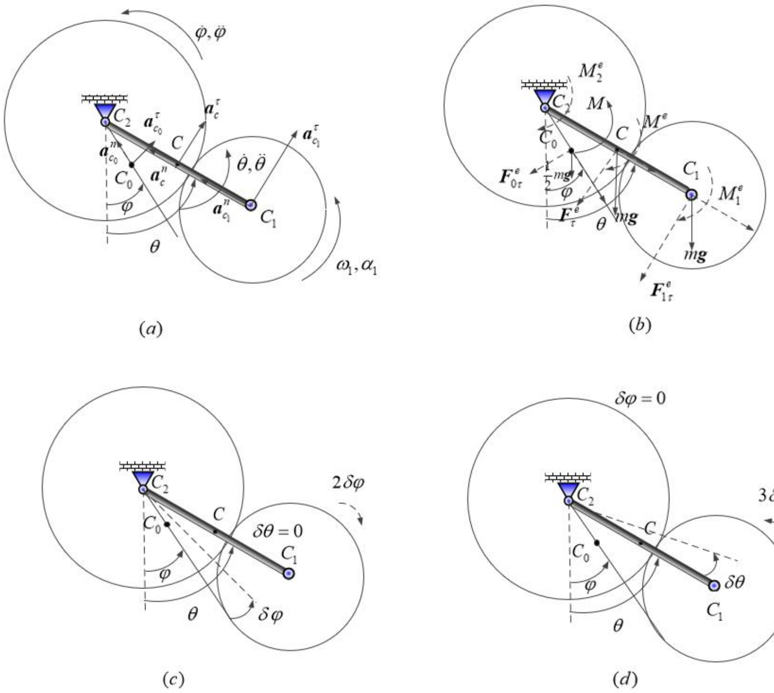


图 2-2-2

及（1 分）

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}mr^2(3\ddot{\theta}-2\ddot{\varphi})(3\delta\theta)-m(3r\ddot{\theta})(3r\delta\theta)-mg\sin\theta(3r\delta\theta) \\
&-\frac{1}{12}m(3r)^2\ddot{\theta}\delta\theta-m\frac{3r}{2}\ddot{\theta}(\frac{3r}{2}\delta\theta)+M\delta\theta-mg\sin\theta(\frac{3}{2}r\delta\theta)=0
\end{aligned}
\tag{2-2-4}
$$

在(2-2-3)和(2-2-4)中分别消去$\delta\varphi,\delta\theta$，得（2 分）

$$
\begin{cases}
321\ddot{\varphi}-96\ddot{\theta}+\dfrac{4g}{r}\sin\varphi=0 \\
-6\ddot{\varphi}+33\ddot{\theta}+(-\dfrac{2M}{mr^2}+\dfrac{9g}{r}\sin\theta)=0
\end{cases}
\tag{2-2-5}
$$

解法二：动力学普遍定理
取齿轮 2 为研究对象，受力图如图 2-2-3 所示：（1 分）
由动量矩定理：

$$J_{c_2}\ddot{\varphi}=\sum M_{c_2}\left(\boldsymbol{F}_i^e\right)$$

得：（1 分）

$$(8+\frac{1}{32})mr^2\ddot{\varphi}=2F_s r-\frac{1}{8}mgr\sin\varphi \tag{2-2-6}$$

取齿轮 1 为研究对象，受力图如图 2-2-4 所示：（1 分）

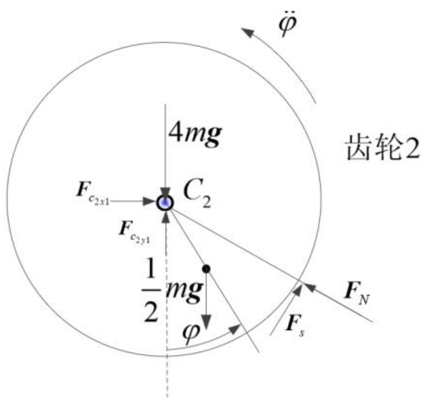


图 2-2-3

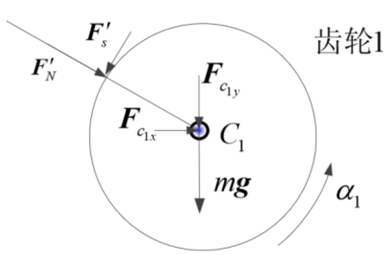


图 2-2-4

由动量矩定理：

$$J_{c_1}\alpha_1=\sum M_{c_1}\left(\boldsymbol{F}_i^{e}\right)$$

其中：$\omega_1=3\dot{\theta}-2\dot{\varphi}$，$\alpha_1=3\ddot{\theta}-2\ddot{\varphi}$　（1 分）

得：（1 分）

$$\frac{1}{2}mr^2(3\ddot{\theta}-2\ddot{\varphi})=F_s r \tag{2-2-7}$$

(2-2-7)式代入(2-2-6)式得：

$$321\ddot{\varphi}-96\ddot{\theta}+\frac{4g}{r}\sin\varphi=0 \tag{2-2-8}$$

取整体为研究对象，受力图如图 2-2-5 所示：（1 分）

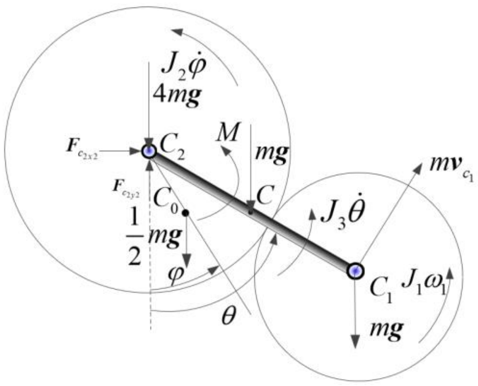


图 2-2-5

由动量矩定理：

$$\frac{\mathrm{d}L_{c_2}}{\mathrm{d}t}=\sum M_{c_2}\left(\boldsymbol{F}_i^{e}\right)$$

其中，

$$\begin{aligned}L_{c_2}&=mv_{c_1}\cdot 3r+J_1\omega_1+J_2\dot{\varphi}+J_3\dot{\theta}\\&=3mr\dot{\theta}\cdot 3r+\frac{1}{2}mr^2(3\dot{\theta}-2\dot{\varphi})+(8+\frac{1}{32})mr^2\dot{\varphi}+\frac{1}{3}m\cdot 9r^2\dot{\theta}\end{aligned}$$

得：（1 分）

$$\frac{225}{32}\ddot{\varphi}+\frac{27}{2}\ddot{\theta}=\frac{1}{mr^2}(M-\frac{9}{2}mgr\sin\theta-\frac{1}{8}mgr\sin\varphi) \tag{2-2-9}$$

(2-2-8)式代入(2-2-9)式得：

$$-6\ddot{\varphi}+33\ddot{\theta}=\frac{1}{mr^2}(2M-9mgr\sin\theta) \tag{2-2-10}$$

所以，系统的运动微分方程为：（2 分）

$$\begin{cases} 321\ddot{\varphi}-96\ddot{\theta}+\dfrac{4g}{r}\sin\varphi=0 \\ \dfrac{225}{32}\ddot{\varphi}+\dfrac{27}{2}\ddot{\theta}+\dfrac{1}{mr^2}(-M+\dfrac{9}{2}mgr\sin\theta+\dfrac{1}{8}mgr\sin\varphi)=0 \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} 321\ddot{\varphi}-96\ddot{\theta}+\dfrac{4g}{r}\sin\varphi=0 \\ -6\ddot{\varphi}+33\ddot{\theta}+(-\dfrac{2M}{mr^2}+\dfrac{9g}{r}\sin\theta)=0 \end{cases} \tag{2-2-11}$$

解法三：拉格朗日方程

取齿轮 2 转角 φ 和曲柄转角 θ 为广义坐标，

系统动能为:

$$T=\frac{1}{2}mv_{c_1}^2+\frac{1}{2}J_1\omega_1^2+\frac{1}{2}J_2\omega_2^2+\frac{1}{2}J_3\omega^2 \tag{2-2-12}$$

其中：（1 分）

$$\omega_1=3\dot{\theta}-2\dot{\varphi},\quad v_{c_1}=3r\dot{\theta},$$
$$J_1=\frac{1}{2}mr^2,\quad J_2=\left[\left(\frac{1}{2}\cdot 4m\cdot(2r)^2+\frac{1}{2}m\cdot\frac{r^2}{16}\right)\right]=\frac{257}{32}mr^2,\quad J_3=3mr^2 \tag{2-2-13}$$

整理得：

动能（2 分）

$$T=\frac{33}{4}mr^2\dot{\theta}^2+\left(5mr^2+\frac{1}{64}mr^2\right)\dot{\varphi}^2-3mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi} \tag{2-2-14}$$

势能（2 分）

$$\begin{aligned} V&=\frac{1}{2}mge(1-\cos\varphi)+\frac{3}{2}mg(R+r)(1-\cos\theta)-M\theta \\ &=\frac{1}{8}mgr(1-\cos\varphi)+\frac{9}{2}mgr(1-\cos\theta)-M\theta \end{aligned} \tag{2-2-15}$$

拉格朗日函数

$$\begin{aligned} L&=T-V \\ &=\frac{33}{4}mr^2\dot{\theta}^2+\frac{321}{64}mr^2\dot{\varphi}^2-3mr^2\dot{\theta}\dot{\varphi} \\ &\quad-\frac{1}{8}mgr(1-\cos\varphi)-\frac{9}{2}mgr(1-\cos\theta)+M\theta \end{aligned} \tag{2-2-16}$$

由拉格朗日方程（1 分）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_k}=0,(q_k\text{为}\varphi，\ \theta) \tag{2-2-17}$$

得系统的运动微分方程为（2 分）：

$$\begin{cases} 321\ddot{\varphi}-96\ddot{\theta}+\dfrac{4g}{r}\sin\varphi=0 \\ -6\ddot{\varphi}+33\ddot{\theta}+(-\dfrac{2M}{mr^2}+\dfrac{9g}{r}\sin\theta)=0 \end{cases} \tag{2-2-18}$$

分值	说明
8	解法一：角速度、角加速度关系各 1 分；惯性力主矢、主矩各 1 分；方程各 1 分；两个微分方程各 1 分； 解法二：三个受力图各1分，三个方程各1分，两个微分方程各1分； 解法三：角速度关系式 1 分；动能势能各 2 分；具体方程 1 分；两个微分方程各 1 分。

(3)平衡位置与稳定性（共 5 分）

平衡位置（共 4 分）

解法一：

势能（1 分）

$$\begin{aligned} V&=\frac{1}{2}mge(1-\cos\varphi)+\frac{3}{2}mg(R+r)(1-\cos\theta)-M\theta \\ &=\frac{1}{8}mgr(1-\cos\varphi)+\frac{9}{2}mgr(1-\cos\theta)-M\theta \end{aligned} \tag{2-3-1}$$

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \varphi}=\dfrac{1}{8}mgr\sin\varphi=0 \\ \dfrac{\partial V}{\partial \theta}=\dfrac{9}{2}mgr\sin\theta-M=0 \end{cases} \tag{2-3-2}$$

(2-3-2)第一式有解

$$\varphi_1=0，\ \varphi_2=\pi \tag{2-3-3}$$

(2-3-2)第二式有解

$$\sin\theta=\frac{2M}{9mgr} \tag{2-3-4}$$

解得

$$\theta_1=\bar{\theta}=\sin^{-1}(\frac{2M}{9mgr}),\ \theta_2=\pi-\bar{\theta},\quad 0\le\bar{\theta}<\pi/2 \tag{2-3-5}$$

(i) 当 $M>M_c=\dfrac{9}{2}mgr$ 时，系统无平衡位置；（0.5 分）

(ii) 当 $M<M_c=\dfrac{9}{2}mgr$ 时，系统有四个平衡位置(图 2-3-1)（4*0.5 分）

$P_1=(0,\bar{\theta});\ P_2=(0,\pi-\bar{\theta});\ P_3=(\pi,\bar{\theta});\quad P_4=(\pi,\pi-\bar{\theta})$

(iii) 当 $M=M_c=\dfrac{9}{2}mgr$ 时，系统有两个临界平衡位置(图 2-3-2)（0.5 分）

$$P_{1c}=(0,\pi/2),\quad P_{2c}=(\pi,\pi/2) \tag{2-3-6}$$

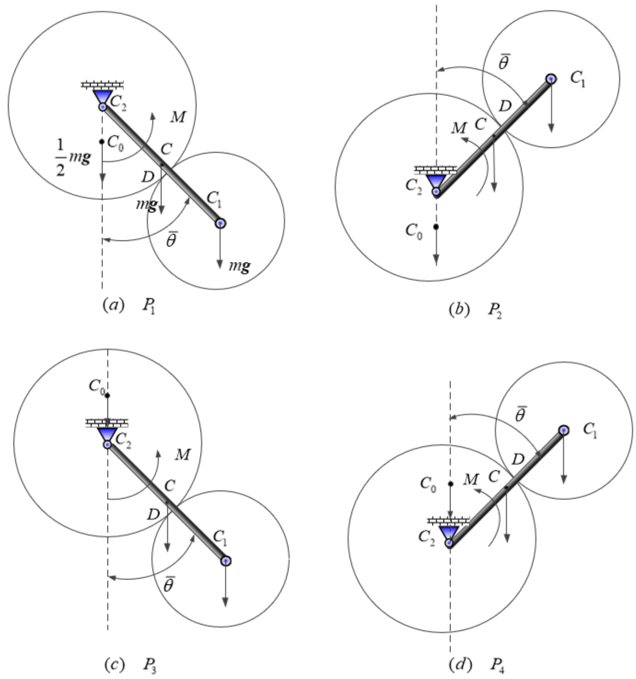


图 2-3-1 平衡位置

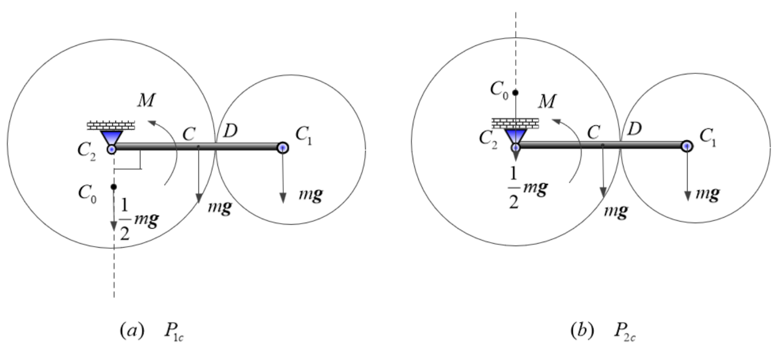


图 2-3-2 临界平衡位置

解法二：

令(2-2-18)中，

$$\begin{cases}\ddot{\varphi}=0,\quad \ddot{\theta}=0\\ \dot{\varphi}=0,\quad \dot{\theta}=0\end{cases}\tag{2-3-7}$$

有：（1 分）

$$\begin{cases}\dfrac{4g}{r}\sin\varphi=0\\ \dfrac{9g}{r}\sin\theta=\dfrac{2M}{mr^2}\end{cases}\tag{2-3-8}$$

讨论及结果同解法一。

稳定性（共 1 分）

由(2-3-2)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}=\frac{1}{8}mgr\cos\varphi,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}=\frac{9}{2}mgr\cos\theta,\ \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial\theta}=0\tag{2-3-9}$$

当 $M<M_c$ 时，由(2-3-9)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}(P_1)=\frac{1}{8}mgr>0,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}(P_1)=\frac{9}{2}mgr\cos\bar{\theta}>0,\ \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial\theta}(P_1)=0\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}(P_2)=\frac{1}{8}mgr>0,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}(P_2)=-\frac{9}{2}mgr\cos\bar{\theta}<0,\ \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial\theta}(P_2)=0\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}(P_3)=-\frac{1}{8}mgr<0,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}(P_3)=\frac{9}{2}mgr\cos\bar{\theta}>0,\ \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial\theta}(P_3)=0\\
&\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}(P_4)=-\frac{1}{8}mgr<0,\quad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}(P_4)=-\frac{9}{2}mgr\cos\bar{\theta}<0,\ \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial\theta}(P_4)=0
\end{aligned}\tag{2-3-10}$$

因此只有 P_1 是稳定的，其它三个平衡位置都是不稳定的。

分值	说明
5	平衡位置：列出求解条件，1 分；给出四个平衡位置及条件，每个 0.5 分；讨论，各 0.5 分。 稳定性：指出 P_1 稳定，其它三个平衡位置不稳定，1 分；结论正确，没有分析，0.5 分。

第 3 题（12 分）

解法一：

（1）求阴影区域合力的大小

最大正应力：$\sigma_{\max}=\dfrac{6M}{bh^2}$

阴影区域上边缘的正应力：$\sigma^*=\dfrac{1}{2}\sigma_{\max}=\dfrac{3M}{bh^2}$

阴影区域正应力的合力：$F_N^*=\dfrac{1}{2}(\sigma_{\max}+\sigma^*)\dfrac{h}{4}b=\dfrac{9M}{8h}$

阴影区域切应力的合力：$F_S^*=\int_{h/4}^{h/2}\tau b\mathrm{d}y=\dfrac{5}{32}F_S$

阴影区域的合力大小：

$$F^*=\sqrt{\frac{81M^2}{64h^2}+\frac{25}{1024}{F_S}^2}$$

分值	说明
2	1）给出 $F^*=\sqrt{\dfrac{81M^2}{64h^2}+\dfrac{25}{1024}{F_S}^2}$ 得 2 分； 2）弯矩 M 和剪力 F_S 用弯矩函数(1)式和剪力函数(2)式代换正确的，同样得 2 分。

（2）求梁内任意一点第三强度理论的相当应力

$$M(x)=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2 \tag{1}$$

$$F_S(x)=\frac{1}{2}ql-qx \tag{2}$$

$$\sigma=\frac{M(x)y}{I_z}$$

$$\tau=\frac{F_S(x)S_z^*}{bI_z}=\frac{F_S(x)}{2I_z}(\frac{h^2}{4}-y^2)$$

$$\sigma_{r3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\frac{q}{2I_z}\sqrt{(lx-x^2)^2y^2+(l-2x)^2(\frac{h^2}{4}-y^2)^2}$$

分值	说明
2	1）给出 $\sigma_{r3}=\dfrac{q}{2I_z}\sqrt{(lx-x^2)^2y^2+(l-2x)^2(\dfrac{h^2}{4}-y^2)^2}$ 或

	$\sigma_{\mathrm{r3}}=\dfrac{6q}{bh^3}\sqrt{(lx-x^2)^2y^2+(l-2x)^2(\dfrac{h^2}{4}-y^2)^2}$ 得 2 分; 2）只写出 $\sigma_{\mathrm{r3}}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$ 不给分; 3）用弯矩 $M(x)$和剪力 $F_{\mathrm{S}}(x)$表示的不给分; 4）用弯矩 M 和剪力 F_{S} 表示的不给分。

（3）求危险点的位置和强度条件

由于第三强度理论相当应力关于该简支梁的跨中截面和 z 轴对称，故可将讨论范围设为：$0\le x\le l/2$，$0\le y\le h/2$。

$$\frac{\partial\sigma_{\mathrm{r3}}}{\partial y}=\frac{1}{2\sigma_{\mathrm{r3}}}(2\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial y}+8\tau\frac{\partial\tau}{\partial y})=\frac{1}{\sigma_{\mathrm{r3}}}(\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial y}+4\tau\frac{\partial\tau}{\partial y})$$

$$=\frac{1}{\sigma_{\mathrm{r3}}}[\frac{M(x)y}{I_z}\times\frac{M(x)}{I_z}+4\times\frac{F_{\mathrm{S}}(x)}{2I_z}(\frac{h^2}{4}-y^2)\times\frac{F_{\mathrm{S}}(x)}{2I_z}\times(-2y)]$$

$$=\frac{y[2F_{\mathrm{S}}^2(x)y^2+M^2(x)-\frac{1}{2}F_{\mathrm{S}}^2(x)h^2]}{\sigma_{\mathrm{r3}}I_z^2}$$

令 $\dfrac{\partial\sigma_{\mathrm{r3}}}{\partial y}=0$，得：

$$y[2F_{\mathrm{S}}^2(x)y^2+M^2(x)-\frac{1}{2}F_{\mathrm{S}}^2(x)h^2]=0$$

① 若 $M^2(x)\ge\dfrac{1}{2}F_{\mathrm{S}}^2(x)h^2$, 即 $M(x)\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}F_{\mathrm{S}}(x)h$ ，

σ_{r3}只有一个极值点：$y=0$

又 $$\frac{\partial^2\sigma_{\mathrm{r3}}}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}[y\frac{2F_{\mathrm{S}}^2(x)y^2+M^2(x)-\frac{1}{2}F_{\mathrm{S}}^2(x)h^2}{\sigma_{\mathrm{r3}}I_z^2}]$$

$$=\frac{2F_{\mathrm{S}}^2(x)y^2+M^2(x)-\frac{1}{2}F_{\mathrm{S}}^2(x)h^2}{\sigma_{\mathrm{r3}}I_z^2}+\frac{y}{I_z^2}\times\{\frac{4F_{\mathrm{S}}^2(x)y}{\sigma_{\mathrm{r3}}}$$

$$-\frac{[2F_{\mathrm{S}}^2(x)y^2+M^2(x)-\frac{1}{2}F_{\mathrm{S}}^2(x)h^2]\frac{\partial\sigma_{\mathrm{r3}}}{\partial y}}{\sigma_{\mathrm{r3}}^2}\}$$

$$\frac{\partial^2\sigma_{r3}}{\partial y^2}|_{y=0}=\frac{1}{\sigma_{r3}I_z^2}[M^2(x)-\frac{1}{2}F_S^2(x)h^2]>0$$

故σ_{r3}在$y=0$处取得最小值。

又当$y>0$时，$\frac{\partial\sigma_{r3}}{\partial y}=\frac{y[2F_S^2(x)y^2+M^2(x)-\frac{1}{2}F_S^2(x)h^2]}{\sigma_{r3}I_z^2}>0$

σ_{r3}为单调增函数，故$y=\frac{h}{2}$时取得最大值：

$$\sigma_{r3}=\sigma_{max}=\frac{6M(x)}{bh^2}$$

分值	说明
3	1）给出条件： “ $\frac{M^2(x)}{F_S^2(x)}\geq\frac{h^2}{2}$或$M(x)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}F_S(x)h$ ”，得 1 分；若$M(x)$、$F_S(x)$用(1)、(2)式代入，也得 1 分； 2）在给出条件 1）的同时，给出“σ_{r3}在 y=0 处取得最小值”，得 1 分； 3）在给出条件 1）的同时，给出“σ_{r3}在$y=\frac{h}{2}$（或$y=\pm\frac{h}{2}$）处取得最大值”，得 1 分。 4）仅给出“σ_{r3}在 y=0 处取得最小值”不得分； 5）仅给出“σ_{r3}在$y=\frac{h}{2}$（或$y=\pm\frac{h}{2}$）处取得最大值”不得分。

② 若$M^2(x)<\frac{1}{2}F_S^2(x)h^2$，即$M(x)<\frac{\sqrt{2}}{2}F_S(x)h$，

σ_{r3}有两个可能的极值点：

$$y_1=0$$

$$y_2=\sqrt{\frac{h^2}{4}-\frac{1}{2}[\frac{M(x)}{F_S(x)}]^2}$$

ⅰ）对于$y_1=0$

$$\frac{\partial^2\sigma_{r3}}{\partial y^2}|_{y=y_1}=\frac{1}{\sigma_{r3}I_z^2}[M^2(x)-\frac{1}{2}F_S^2(x)h^2]<0$$

故σ_{r3}在$y_1=0$处取得极大值：

$$\sigma_{r3}=2\tau=\frac{3F_S(x)}{bh}$$

ii）对于$y_2=\sqrt{\frac{h^2}{4}-\frac{1}{2}[\frac{M(x)}{F_S(x)}]^2}$

$$\frac{\partial^2\sigma_{r3}}{\partial y^2}|_{y=y_2}=\frac{4}{\sigma_{r3}I_z^2}F_S^2(x)y^2>0$$

故σ_{r3}在y_2处取得极小值。

又当$y>y_2=\sqrt{\frac{h^2}{4}-\frac{1}{2}[\frac{M(x)}{F_S(x)}]^2}$时，$\sigma_{r3}$为单调增函数，

故$y=\frac{h}{2}$时取得较大值：

$$\sigma_{r3}=\sigma_{\max}=\frac{6M}{bh^2}$$

分值	说明
3	1）给出条件： “$\frac{M^2(x)}{F_S^2(x)}<\frac{h^2}{2}$或$M(x)<\frac{\sqrt{2}}{2}F_S(x)h$”，得 1 分； 2）在给出条件 1）的同时，给出“σ_{r3}在y_1=0 处取得极大值”，得 1 分； 3）在给出条件 1）的同时，给出“σ_{r3}在$y_2=\sqrt{\frac{h^2}{4}-\frac{1}{2}[\frac{M(x)}{F_S(x)}]^2}$处取得极小值”，得 1 分； 4）仅给出“$\sigma_{r3}$在$y_1$=0 处取得极大值”不得分； 5）仅给出“极值点$y_2=\sqrt{\frac{h^2}{4}-\frac{1}{2}[\frac{M(x)}{F_S(x)}]^2}$”不得分； 6）仅给出“$\sigma_{r3}$在$y=y_2$处取得极小值”不得分。 注：以上答案，若$M(x)$、$F_S(x)$用(1)、(2)式代入，也得

	分。

③ 令 $\dfrac{6M(x)}{bh^2}=\dfrac{3F_S(x)}{bh}$

得 $M(x)=\dfrac{1}{2}F_S(x)h$

即$M(x)\geq\dfrac{1}{2}F_S(x)h$ 时，危险点在上下边缘；

$M(x)<\dfrac{1}{2}F_S(x)h$ 时，危险点在中性轴处。

将弯矩和剪力函数代入，得

$$2x^2-2(l+h)x+hl=0$$

$$x_0=\frac{l+h-\sqrt{l^2+h^2}}{2}$$

即到两端支座的距离满足 $x_0\leq x\leq l/2$ 时，危险点在上下边缘。由于跨中截面上的弯矩最大，故危险点在跨中截面的上下边缘，强度条件为：

$$\sigma_{r3}=\frac{3ql^2}{4bh^2}\leq[\sigma]$$

当满足 $0\leq x<x_0$ 时，危险点在中性轴上。由于支座截面上的剪力最大，故危险点在靠近支座截面的中性轴处，强度条件为：

$$\sigma_{r3}=\frac{3ql}{2bh}\leq[\sigma]$$

一般情况下，简支梁有

$$l>>2h$$

所以跨中截面上下边缘的相当应力远大于支座附近截面中性轴处的相当应力，故此时梁危险点的强度条件为：

$$\sigma_{r3}=\frac{3ql^2}{4bh^2}\leq[\sigma]$$

分值	说明
2	1）给出 $x_0=\dfrac{l+h-\sqrt{l^2+h^2}}{2}$ 得 1 分； 2）给出 $\sigma_{r3}=\dfrac{3ql^2}{4bh^2}\leq[\sigma]$ 或 $\dfrac{3ql^2}{4bh^2}\leq[\sigma]$ 得 1 分。

解法二：

（1）求阴影区域合力的大小

正应力的合力为四棱柱的体积。

最大正应力：$\sigma_{\max}=\dfrac{6M}{bh^2}$

阴影区域上边缘的正应力：$\sigma^*=\dfrac{1}{2}\sigma_{\max}=\dfrac{3M}{bh^2}$

阴影区域正应力的合力： $F_{\mathrm{N}}^*=\dfrac{1}{2}(\sigma_{\max}+\sigma^*)\dfrac{h}{4}b=\dfrac{9M}{8h}$

阴影区域切应力的合力： $F_{\mathrm{S}}^*=\int_{h/4}^{h/2}\tau b\mathrm{d}y=\dfrac{5}{32}F_{\mathrm{S}}$

阴影区域的合力：

$$F^*=\sqrt{F_{\mathrm{N}}^{*2}+F_{\mathrm{S}}^{*2}}=\sqrt{\frac{81M^2}{64h^2}+\frac{25}{1024}F_{\mathrm{S}}^2}$$

分值	说明
2	1）给出 $F^*=\sqrt{\dfrac{81M^2}{64h^2}+\dfrac{25}{1024}F_{\mathrm{S}}^2}$ 得 2 分； 2）弯矩 M 和剪力 F_{S} 用弯矩函数(3)式和剪力函数(4)式代换正确的，同样得 2 分。

（2）求梁内任意一点第三强度理论的相当应力

$$M(x)=\frac{1}{2}qlx-\frac{1}{2}qx^2 \tag{3}$$

$$F_{\mathrm{S}}(x)=\frac{1}{2}ql-qx \tag{4}$$

$$\sigma=\frac{My}{I_z}$$

$$\tau=\frac{F_{\mathrm{S}}S_z^*}{bI_z}=\frac{F_{\mathrm{S}}}{2I_z}\left(\frac{h^2}{4}-y^2\right)$$

$$\sigma_{\mathrm{r}3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}=\frac{q}{2I_z}\sqrt{(lx-x^2)^2y^2+(l-2x)^2(\frac{h^2}{4}-y^2)^2}$$

分值	说明
2	1）给出 $\sigma_{\mathrm{r}3}=\frac{q}{2I_z}\sqrt{(lx-x^2)^2y^2+(l-2x)^2(\frac{h^2}{4}-y^2)^2}$ 或 $\sigma_{\mathrm{r}3}=\frac{6q}{bh^3}\sqrt{(lx-x^2)^2y^2+(l-2x)^2(\frac{h^2}{4}-y^2)^2}$ 得 2 分； 2）只写出 $\sigma_{\mathrm{r}3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$ 不给分； 3）用弯矩 $M(x)$和剪力 $F_{\mathrm{S}}(x)$表示的不给分； 4）用弯矩 M 和剪力 F_{S} 表示的不给分。

（3）求危险点的位置和强度条件

由于第三强度理论相当应力关于该简支梁的跨中截面和 z 轴对称，故可将讨论范围设为：$0\le x\le l/2$，$0\le y\le h/2$。

$$\sigma_{\mathrm{r}3}=\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}$$

$$=\sqrt{\frac{M^2(x)}{I_z^2}y^2+\frac{F_{\mathrm{S}}^2(x)}{I_z^2}(\frac{h^2}{4}-y^2)^2}$$

$$=\frac{F_{\mathrm{S}}(x)}{I_z}\sqrt{y^4+[\frac{M^2(x)}{F_{\mathrm{S}}^2(x)}-\frac{h^2}{2}]y^2+\frac{h^4}{16}}$$

$$=\frac{F_{\mathrm{S}}(x)}{I_z}\sqrt{[y^2+\frac{1}{2}(\frac{M^2(x)}{F_{\mathrm{S}}^2(x)}-\frac{h^2}{2})]^2-\frac{1}{4}(\frac{M^2(x)}{F_{\mathrm{S}}^2(x)}-\frac{h^2}{2})^2+\frac{h^4}{16}}$$

① 若 $\frac{M^2(x)}{F_{\mathrm{S}}^2(x)}\ge\frac{h^2}{2}$，即 $M(x)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}F_{\mathrm{S}}(x)h$，$\sigma_{\mathrm{r}3}$是单调增函数，且在 $y=0$处取得最小值，在 $y=\frac{h}{2}$ 处取得最大值：

$$\sigma_{\mathrm{r}3}=\sigma_{\max}=\frac{6M(x)}{bh^2}$$

分值	说明
3	1）给出条件：

	“ $\dfrac{M^2(x)}{F_S^2(x)} \ge \dfrac{h^2}{2}$ 或 $M(x) \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2} F_S(x)h$ ”，得 1 分；若 $M(x)$、$F_S(x)$ 用(3)、(4)式代入，也得 1 分； 2）在给出条件 1）的同时，给出“ σ_{r3} 在 y=0 处取得最小值”，得 1 分； 3）在给出条件 1）的同时，给出“ σ_{r3} 在 $y=\dfrac{h}{2}$（$y=\pm\dfrac{h}{2}$）处取得最大值”，得 1 分。 4）仅给出“ σ_{r3} 在 y=0 处取得最小值”不得分； 5）仅给出“ σ_{r3} 在 $y=\dfrac{h}{2}$（$y=\pm\dfrac{h}{2}$）处取得最大值”不得分。

② 若 $\dfrac{M^2(x)}{F_S^2(x)} < \dfrac{h^2}{2}$，即 $M(x) < \dfrac{\sqrt{2}}{2} F_S(x)h$ ，σ_{r3} 从 $y_1=0$ 开始先随 y 增大而减小，故在 $y_1=0$ 处取得极大值：

$$\sigma_{r3} = 2\tau = \frac{3F_S(x)}{bh}$$

当 y 达到 $\sqrt{\dfrac{h^2}{4} - \dfrac{1}{2}[\dfrac{M(x)}{F_S(x)}]^2}$ 之后，σ_{r3} 开始随 y 增大而增大，故在

$y_2 = \sqrt{\dfrac{h^2}{4} - \dfrac{1}{2}[\dfrac{M(x)}{F_S(x)}]^2}$ 处取得极小值。

又当 $y > y_2 = \sqrt{\dfrac{h^2}{4} - \dfrac{1}{2}[\dfrac{M(x)}{F_S(x)}]^2}$ 时，σ_{r3} 为单调增函数，

故 $y=\dfrac{h}{2}$ 时取得较大值：

$$\sigma_{r3} = \sigma_{max} = \frac{6M}{bh^2}$$

分值	说明
3	1）给出条件：

	“$\frac{M^2(x)}{F_S^2(x)}<\frac{h^2}{2}$或$M(x)<\frac{\sqrt{2}}{2}F_S(x)h$”，得 1 分； 2）在给出条件 1）的同时，给出“σ_{r3}在$y_1=0$处取得极大值”，得 1 分； 3）在给出条件 1）的同时，给出“σ_{r3}在$y_2=\sqrt{\frac{h^2}{4}-\frac{1}{2}[\frac{M(x)}{F_S(x)}]^2}$处取得极小值”，得 1 分； 4）仅给出“$\sigma_{r3}$在$y_1=0$处取得极大值”不得分； 5）仅给出“极值点$y_2=\sqrt{\frac{h^2}{4}-\frac{1}{2}[\frac{M(x)}{F_S(x)}]^2}$”不得分； 6）仅给出“$\sigma_{r3}$在$y=y_2$处取得极小值”不得分。 注：若$M(x)$、$F_S(x)$用(3)、(4)式代入，也得分。

③ 令 $\frac{6M(x)}{bh^2}=\frac{3F_S(x)}{bh}$

得 $$M(x)=\frac{1}{2}F_S(x)h$$

即$M(x)\geq\frac{1}{2}F_S(x)h$时，危险点在上下边缘；

$M(x)<\frac{1}{2}F_S(x)h$时，危险点在中性轴处。

将弯矩和剪力函数代入，得

$$2x^2-2(l+h)x+hl=0$$

$$x_0=\frac{l+h-\sqrt{l^2+h^2}}{2}$$

即到两端支座的距离满足 $x_0\leq x\leq l/2$ 时，危险点在上下边缘。由于跨中截面上的弯矩最大，故危险点在跨中截面的上下边缘，强度条件为：

$$\sigma_{r3}=\frac{3ql^2}{4bh^2}\leq[\sigma]$$

当满足 $0 \le x < x_0$ 时，危险点在中性轴上。由于支座截面上的剪力最大，故危险点在靠近支座截面的中性轴处，强度条件为：

$$\sigma_{\mathrm{r3}} = \frac{3ql}{2bh} \le [\sigma]$$

一般情况下有：

$$l >> 2h$$

所以跨中截面上下边缘的相当应力远大于支座附近截面中性轴处的相当应力，故此时梁危险点的强度条件为：

$$\sigma_{\mathrm{r3}} = \frac{3ql^2}{4bh^2} \le [\sigma]$$

分值	说明
2	1）给出 $x_0 = \dfrac{l+h-\sqrt{l^2+h^2}}{2}$ 得 1 分； 2）给出 $\sigma_{\mathrm{r3}} = \dfrac{3ql^2}{4bh^2} \le [\sigma]$ 或 $\dfrac{3ql^2}{4bh^2} \le [\sigma]$ 得 1 分。

第 4 题（18 分）

（1）求 *AB* 和 *AH* 杆的欧拉临界力：

$$F_{crAB}=\frac{\pi^2 EI_{AB}}{l_{AB}^2}=36517.04\text{N}$$

$$F_{crAH}=\frac{\pi^2 EI_{AH}}{l_{AH}^2}=82163.33\text{N}$$

分值	说明
2	1）求得每根杆的临界力得 1 分，两根杆共 2 分； 2）没有计算出临界力最后的数值结果不给分。

（2）校核 *AB* 和 *AH* 的稳定性

① 设端面 C 刚接触到铰链 A 时重物的冲击力为 F_{Cd1}，如图 4-1 所示。

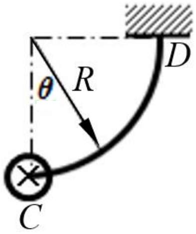


图 4-1

$$M(\theta)=F_{Cd1}R\sin\theta \qquad \frac{\partial M(\theta)}{\partial F_{Cd1}}=R\sin\theta$$

$$T(\theta)=F_{Cd1}R(1-\cos\theta) \qquad \frac{\partial T(\theta)}{\partial F_{Cd1}}=R(1-\cos\theta)$$

根据卡氏第二定理：

$$w_{Cd1}=\frac{1}{EI_{CD}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}M(\theta)\frac{\partial M(\theta)}{\partial F_{Cd1}}R\mathrm{d}\theta+\frac{1}{GI_{\mathrm{p}}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}T(\theta)\frac{\partial T(\theta)}{\partial F_{Cd1}}R\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\pi F_{Cd1}R^3}{4EI_{CD}}+\frac{(3\pi\text{-}8)F_{Cd1}R^3}{4GI_{\mathrm{p}}}$$

由 $\dfrac{\pi F_{Cd1}R^3}{4EI_{CD}}+\dfrac{(3\pi\text{-}8)F_{Cd1}R^3}{4GI_{\mathrm{p}}}=\delta$

得：

$$F_{\mathrm{Cd1}}=\frac{\delta}{\dfrac{\pi R^3}{4EI_{CD}}+\dfrac{(3\pi\text{-}8)R^3}{4GI_{\mathrm{p}}}}=201.08\mathrm{N} \tag{1}$$

分值	说明
3	1）直接求 P=200N 作用下端面 C 的铅垂位移不得分； 2）给出 $F_{\mathrm{Cd1}}=\dfrac{\delta}{\dfrac{\pi R^3}{4EI_{CD}}+\dfrac{(3\pi\text{-}8)R^3}{4GI_{\mathrm{p}}}}$ 或者求得 $F_{\mathrm{Cd1}}=201.08\mathrm{N}$ 得 3 分；**否则，**仅写出了计算 F_{Cd1} 的方法，只得 1 分。

② 设运动到最低点时重物与端面 C 之间的作用力为 $F_{C\mathrm{d}}$，端面 C 与铰链 A 点之间的作用力为 $F_{A\mathrm{d}}$，故：

固定端面D上的弯矩：　$M_D=(F_{\mathrm{Cd}}-F_{\mathrm{Ad}})R$

固定端面D上的扭矩：　$T_D=(F_{\mathrm{Cd}}-F_{\mathrm{Ad}})R$

固定端面D上边缘的正应力：　$\sigma=\dfrac{M}{W_{y'}}=\dfrac{32(F_{\mathrm{Cd}}-F_{\mathrm{Ad}})R}{\pi\mathrm{d}^3}$

固定端面D上边缘的切应力：　$\tau=\dfrac{T}{W_{\mathrm{p}}}=\dfrac{16(F_{\mathrm{Cd}}-F_{\mathrm{Ad}})R}{\pi\mathrm{d}^3}$

固定端面 D 上边缘的应力状态如图 4-2 所示：

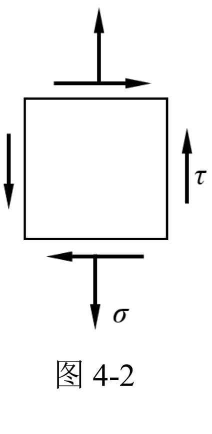


图 4-2

$$\sigma_{45^\circ}=\frac{\sigma}{2}+\tau=\frac{32(F_{\mathrm{Cd}}-F_{\mathrm{Ad}})R}{\pi\mathrm{d}^3}$$

$$\sigma_{-45^\circ}=\frac{\sigma}{2}-\tau=0$$

根据广义胡克定律：

$$\varepsilon_{45^\circ} = \frac{\sigma_{45^\circ}}{E} = \frac{32(F_{\mathrm{Cd}} - F_{\mathrm{Ad}})R}{\pi E d^3}$$

$$F_{\mathrm{Cd}} - F_{\mathrm{Ad}} = \frac{\pi E \varepsilon_{45^\circ} d^3}{32R} = 1609.86\mathrm{N} \tag{2}$$

分值	说明
2	求得 $F_{\mathrm{Cd}} - F_{\mathrm{Ad}} = \dfrac{\pi E \varepsilon_{45^\circ} d^3}{32R}$ 或者 $F_{\mathrm{Cd}} - F_{\mathrm{Ad}} = \dfrac{2E\varepsilon_{45^\circ} I_{CD}}{dR}$ 或者 $F_{\mathrm{Cd}} - F_{\mathrm{Ad}} = \dfrac{E\varepsilon_{45^\circ} I_{\mathrm{p}}}{dR}$ 或者 $F_{\mathrm{Cd}} - F_{\mathrm{Ad}} = 1609.86\mathrm{N}$ 得 2 分，其中 $F_{\mathrm{Cd}} - F_{\mathrm{Ad}}$ 也可以表述成端面 C 受到的合外力。

③ 设运动到最低点时铰链 A 的铅垂位移量为 $\varDelta$，则

$$\frac{F_{\mathrm{Cd1}}}{F_{\mathrm{Cd}} - F_{\mathrm{Ad}}} = \frac{\delta}{\delta + \varDelta}$$

将(1)式和(2)式的结果代入，得：

$$\varDelta = \frac{F_{\mathrm{Cd}} - F_{\mathrm{Ad}}}{F_{\mathrm{Cd1}}}\delta - \delta = 14.01\mathrm{mm}$$

分值	说明
2	求 得 $\varDelta = 14.01\mathrm{mm}$ 或 $\delta + \varDelta = 16.01\mathrm{mm}$ 或 给 出 $\dfrac{F_{\mathrm{Cd1}}}{F_{\mathrm{Cd}} - F_{\mathrm{Ad}}} = \dfrac{\delta}{\delta + \varDelta}$ 得 2 分。

④ 冲击过程中重物势能的改变量：$W = P(h + \delta + \varDelta)$

冲击过程中重物对端面 C 的作用力与端面 C 铅垂位移的关系如图 4-3 所示。

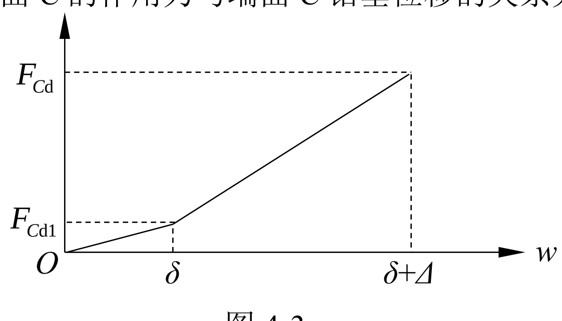


图 4-3

故冲击过程中结构的应变能等于重物对端面 C 的作用力所做的功能，即

$$V_{\varepsilon}=\frac{1}{2}F_{Cd1}\delta+\frac{1}{2}(F_{Cd1}+F_{Cd})\varDelta$$

根据能量守恒，得：

$$W=V_{\varepsilon}$$

$$P(h+\delta+\varDelta)=\frac{1}{2}F_{Cd1}\delta+\frac{1}{2}(F_{Cd1}+F_{Cd})\varDelta$$

分值	说明
3	1）写出结构中的应变能 $V_{\varepsilon}=\frac{1}{2}F_{Cd1}\delta+\frac{1}{2}(F_{Cd1}+F_{Cd})\varDelta$，或者写出能量转换关系 $P(h+\delta+\varDelta)=\frac{1}{2}F_{Cd1}\delta+\frac{1}{2}(F_{Cd1}+F_{Cd})\varDelta$ 得 3 分； 2）只写 $W=V_{\varepsilon}$ 或者 $W=P(h+\delta+\varDelta)$ 或者 $V_{\varepsilon}=P(h+\delta+\varDelta)$ 不得分。

解得：

$$F_{Cd}=\frac{2P(h+\delta+\varDelta)-F_{Cd1}(\delta+\varDelta)}{\varDelta}=28778.35\text{N}$$

分值	说明
2	1）给出 $F_{Cd}=\frac{2P(h+\delta+\varDelta)-F_{Cd1}(\delta+\varDelta)}{\varDelta}$ 得 1 分； 2）求得 F_{Cd}=28778.35kN 得 1 分； 3）若取落差 $h'=h+d/2=1025\text{mm}$，可求得 F_{Cd}=29492.13N，也得 1 分。

将上述结果代入(2)式，得：

$$F_{Ad}=27168.49\text{N}$$

AB 和 AH 杆的轴力：

$$F_{NAB}=F_{Ad}\cos 60°=\frac{1}{2}F_{Ad}=13584.24\text{N}$$
$$<F_{crAB}=36517.04\text{N}$$

$$F_{\mathrm{N}AH}=F_{\mathrm{Ad}}\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}F_{\mathrm{Ad}}=23528.60\mathrm{N}$$

$<F_{\mathrm{cr}AH}$ =82163.33N

故 *AB* 杆和 *AH* 杆均稳定。

分值	说明
2	1）求得 $F_{\mathrm{N}AB}$=13584.24N 得 1 分，若取落差 $h'=h+d/2=1025\mathrm{mm}$，可求得 F_{Cd}=13941.14N，也得 1 分； 2）求得 $F_{\mathrm{N}AH}$=23528.60N 得 1 分，若取落差 $h'=h+d/2=1025\mathrm{mm}$，可求得 F_{Cd}=24146.75N，也得 1 分； 3）未求出 $F_{\mathrm{N}AB}$ 和 $F_{\mathrm{N}AH}$ 数值结果不得分。

（3）提高结构的稳定性

让 *AB* 和 *AH* 同时达到各自的临界力，能提高结构整体的稳定性。

$$\frac{F_{\mathrm{N}AB}}{F_{\mathrm{N}AH}}=\frac{F_{\mathrm{cr}AB}}{F_{\mathrm{cr}AH}}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{4\pi^2 EI_{AB}}{3l_{BH}^2}}{\frac{4\pi^2 EI_{AH}}{l_{BH}^2}}$$

$$\frac{I_{AB}}{I_{AH}}=\sqrt{3}=1.732$$

调整 *AB* 和 *AH* 杆横截面的惯性矩，让它们满足上述关系，即可提高结构整体的稳定性。

分值	说明
2	给出 $\frac{I_{AB}}{I_{AH}}=\sqrt{3}$（或 $\frac{I_{AB}}{I_{AH}}$=1.732）得 2 分。

第 5 题（30 分）

建立如下坐标

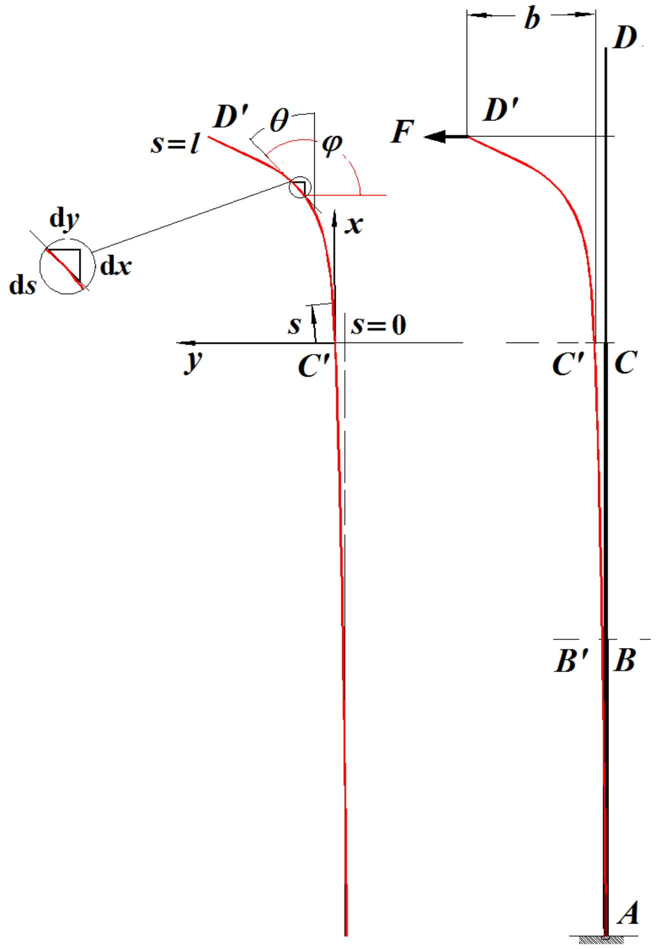


图 5-1 变截面杆的变形及坐标系

（1）计算 C 处挠度和转角：（取 l=600mm）

1.1 计算并判别 AB、BC 段为小变形

BC 段，F 和 Fl 作用于自由端，设 B 端固定：I_{BC} ＝ 62.832mm^4，

$$w_{C1}=\frac{Fl^3}{3E_2 I_{BC}}=11.459F\,(\text{mm}) \quad ，\quad \theta_{C1}=\frac{Fl^2}{2E_2 I_{BC}}=0.028F\,(\text{rad})$$

$$w_{C2}=\frac{(Fl)l^2}{2E_2 I_{BC}}=17.188F\,(\text{mm})，\quad \theta_{C2}=\frac{(Fl)l}{E_2 I_{BC}}=0.057F\,(\text{rad})$$

$$w_{CS}\ =\ 28.674F(\text{mm})，\quad \theta_{CS}=0.086F\,(\text{rad})$$

AB 段，F 和 $2Fl$ 作用于自由端，设 A 端固定：$I_{AB}=427.257\text{mm}^4$，

$$w_{B1}=\frac{Fl^3}{3E_1I_{AB}}=1.685F(\text{mm})，\quad \theta_{B1}=\frac{Fl^2}{2E_1I_{AB}}=0.004F\ (\text{rad})$$

$$w_{B2}=\frac{(2Fl)l^2}{2E_1I_{AB}}=5.055F(\text{mm})，\quad \theta_{B2}=\frac{(2Fl)l}{E_1I_{AB}}=0.017F\ (\text{rad})$$

$$w_{BS}=6.740F(\text{mm})，\quad \theta_{BS}=0.021F\ (\text{rad})$$

由题目条件 $F=1\text{N}$ 计算每段转角，取 $\Delta=\left|\frac{\theta-\tan\theta}{\theta}\right|$：

AB 段： 如 A 端固定，自由端转角为 $\theta_{BS}=0.021\text{rad}$，计算得 $\Delta=0.015\%$，即 $\theta_{BS}\approx\tan\theta_{BS}$，属于小变形范畴；

BC 段：如 B 端固定，自由端转角为 $\theta_{CS}=0.086\text{rad}$，$\Delta=0.247\%$，即 $\theta_{CS}\approx\tan\theta_{CS}$，属于小变形范畴；

分值	说明
3	1）直接给出 ABC 段的小变形结论：1.5 分； 2）能给出判断依据（依据合理就可给分）：1.5 分； 3）未给出 ABC 段的小变形判定结论及依据，此步不得分； 4）此步未给出 ABC 段的小变形判断，但能够在本题第(2)问解答中给出 CD 段为大变形结论及依据，则默认对 ABC 段的小变形判断及依据合格，可给满分 3 分（其中结论 1.5 分，依据 1.5 分）。

1.2 因 ABC 段为小变形，则 C 处挠度与转角可以使用叠加法得：

$$w_C=w_{BS}+\theta_{BS}l+w_{CS}=48.053(\text{mm})\quad 向左$$

$$\theta_C=\theta_{CS}+\theta_{BS}=0.107\ (\text{rad})\quad 逆时针$$

分值	说明
3	1）C 处转角与挠度结果正确各 1.5 分（位移方向不计分）； 2）其它方法（如积分法、能量法等）能得出正确结果也给分。

（2）计算拉力 F 和挠度 w_D

2.1 CD 段大变形判断

CD 段：按标题“（1）”步计算，取 $F=1\text{N}$ 计算，得 $\theta_C=0.107\text{rad}=6.131°$。如取 C 端固定，则可近似取 CD 段为 C 端固定的悬臂梁，其 $\theta_{DS}\approx 45°-6.131°=38.869°$，得 $\Delta=\left|(\theta-\tan\theta)/\theta\right|=18.811\%$，表明 $\theta_{DS}\approx\tan\theta_{DS}$ 不成立。不属于小变形范畴，是大变形。（后续计算中，如果 F 的最终计算结果小于 1N，则 $\theta_C\le 6.131°$，$\theta_{DS}\ge 38.869°$，$\Delta\ge 18.811\%$，可确认该结论；如最终结果 $F>1\text{N}$，则需要重新判断）。

分值	说明
/	如第(1)问中未进行 ABC 段的小变形判断，但此处有 CD 段的大变形判断，则通过此大变形判断可默认替代 ABC 段的小变形判断，给第(1)问的分值，给 3 分（其中结论 1.5 分，依据 1.5 分）。

2.2 取 C 端固定的悬臂梁 CD，对 CD 段建立方程，参见 $xc'y$ 坐标系（令 $I_{CD}=I$）

$$M=F(a-x)$$

曲率为：$K=\dfrac{1}{\rho}=\dfrac{M}{E_3 I}$　　得 $K=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\dfrac{F}{E_3 I}(a-x)$　　(1)

引入：$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos\theta$　　$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\sin\theta$，可得

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}s^2}=\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}=\frac{F}{E_3 I}\left(-\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)=-\frac{F}{E_3 I}\cos\theta$$

$\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\theta}\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s}=\dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}\theta}\cdot K=\dfrac{\mathrm{d}(K^2/2)}{\mathrm{d}\theta}=-\dfrac{F}{E_3 I}\cos\theta$，对 θ 积分得：

$$\frac{K^2}{2}=-\frac{F}{E_3 I}\sin\theta+c_1 \qquad (2)$$

上式边界条件：$s=l$ 时，$K_{(s=l)}=0$，$\theta_{(s=l)}=\theta_l=\dfrac{\pi}{4}$，得 $c_1=\dfrac{F}{E_3 I}\sin\theta_l$

$$K^2 = \frac{2F}{E_3 I}(\sin\theta_l - \sin\theta) \tag{3}$$

取 $\sqrt{\frac{Fl^2}{E_3 I}} = \alpha$， $\lambda = \sin\theta_l$ 得

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\theta_0}^{\theta_l}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\lambda - \sin\theta}} \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}y}\sin\theta$$

积分得

$$\frac{b}{l} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\int_{\theta_0}^{\theta_l}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\lambda - \sin\theta}}\mathrm{d}\theta \tag{5}$$

分值	说明
8	1）(4)、(5)式正确，各 4 分，共 8 分； 2）如(4)式、(5)式不正确，但(1)式、(2)式、(3)式正确，可各得 1 分，共 3 分； 3）给出(1)式后，如采用直角坐标解题，并给出后续表达式，但无后续计算结果的(4)式、(5)式，给 1 分（但仅给出(1)式，不得分）。

2.3 方程(4)、(5)求解：

令 $\varphi = \frac{\pi}{2} + \theta$， $\sin\frac{\varphi}{2} = \sin(\frac{\theta_k}{2})\sin\phi$， 取 $k^2 = \sin^2(\frac{\theta_k}{2}) = \frac{\lambda+1}{2}$， 可得

$$\phi = \sin^{-1}\left(\frac{\sin\frac{1}{2}(\frac{\pi}{2}+\theta)}{\sin\frac{\theta_k}{2}}\right) \tag{6}$$

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\theta_0}^{\theta_l}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\lambda - \sin\theta}} \\ &= \int_{\phi_{0(s=0)}}^{\phi_{1(s=l)}}\frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}}\mathrm{d}\phi \\ &= F(\phi_{1(s=l)},k) - F(\phi_{0(s=0)},k)\end{aligned} \tag{7}$$

$$\frac{b}{l}=\frac{1}{\alpha\sqrt{2}}\int_{\theta_0}^{\theta_l}\frac{\sin\theta}{\sqrt{\lambda-\sin\theta}}\mathrm{d}\theta$$

$$\begin{aligned}&=1-\frac{2}{\alpha}\int_{\phi_{0(s=0)}}^{\phi_{1(s=l)}}\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}\mathrm{d}\phi\\&=1-\frac{2}{\alpha}[E(\phi_{1(s=l)},k)-E(\phi_{0(s=0)},k)]\end{aligned}\tag{8}$$

分值	说明
10	1）(7)、(8)式正确，各给 5 分，共 10 分； 2）(7)、(8)式不正确，但(6)式正确，给 2 分； 3）以上如不能给出正确的积分式，不给分。

2.4 代入数值计算：

根据前面推导，有：

$\varphi=\frac{\pi}{2}+\theta$，$\sin\frac{\varphi}{2}=\sin(\frac{\theta_k}{2})\sin\phi$，$k^2=\sin^2(\frac{\theta_k}{2})=\frac{\lambda+1}{2}$

按题设 $\theta_{s=l}=45°$，得 $\theta_{s=l}=\frac{\pi}{4},\phi_{1(s=l)}=\frac{\pi}{2}$

试算：先取$\theta_{s=0}=0$进行计算，$\phi_{0(s=0)}=0.872$，

$\sqrt{\frac{Fl^2}{E_3I}}=\alpha$ =1.095，得 F=0.02616 N。将 F=0.02616N 代入本解答的标题“（1）”步求解得：$\theta_C=0.107F=0.0028$ (rad)=0.160º。

终算：取$\theta_{s=0}=0.0028$ (rad)，得$\phi_{0(s=0)}=0.873$，$\sqrt{\frac{Fl^2}{E_3I}}=\alpha=1.093$，得 F =0.0260

与上一步计算结果误差很小，可以接受为最终解答，最终取 F =0.026 N。

$\frac{b}{l}=1-\frac{2}{\alpha}[E(\phi_{1(s=l)},k)-E(\phi_{0(s=0)},k)]=0.275$，则 b=165.000mm，

即挠度为：

$$w_D=w_C+b=0.0481F+b=166.251\text{mm}$$

则：F =0.026N，挠度 w_D =166.251mm 为题目结果。

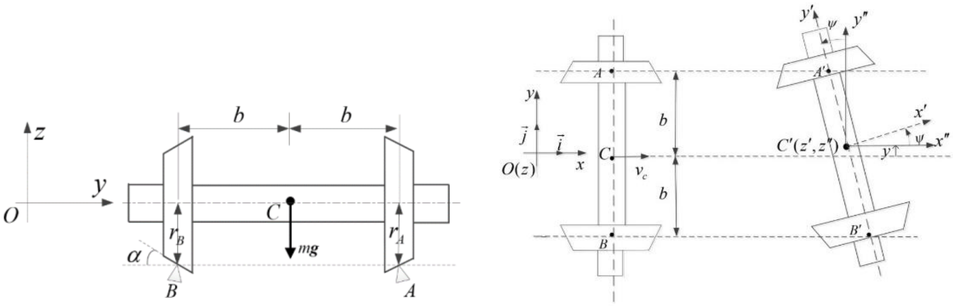
也验证了“2.1” $F\le 1$N 的假设。

分值	说明
6	1）进行了以上试算和终算，F 和 w 数值结果正确（含计算误差），各给 3 分，共 6 分； 2）能给出以上试算和终算的正确计算过程，但数值结果不对，得 4 分； 3）未进行试算，只进行终算，且数值结果基本正确，得 2 分。

注：（此步不计分）本题如采用椭圆积分的更多步展开式计算，最终结果为：

$\sqrt{\dfrac{Fl^2}{E_3 I}} = \alpha$ =1.415，b/l= 0.496，得 F =0.043N，挠度 w_D =298.718mm。

第 6 题（30 分）



(a) 理想运动状态（前视图） (b) 轮对定常运动和受扰运动（俯视图）

图 1 轮对运动描述

说明：如图 1(a)所示，$Oxyz$ 是固定坐标系，在理想运动状态中，轮对的轴线以速度 $v_c = r_0\omega$ 作直线平动, 其中 $r_A = r_B = r_0$ 称为名义滚动半径。如图 1(b)，在考虑轮对理想运动的微扰运动时，可认为轮对轴线始终在一个水平面内，A' 点和 B' 点是轮与轨道的接触点，对应的滚动半径分别为 $r_{A'}$ 和 $r_{B'}$（接触点到轮对轴线的距离）。建立随轮对质心 C' 的平动坐标系 $C'x''y''z''$ 和相对其作定轴转动的坐标系 $C'x'y'z'$ (y' 轴沿轮对的轴线)，用 (y,ψ) 描述轮对的位置，设它们都是微小量。在 $C'x'y'z'$ 坐标系中，轮对绕 y' 轴作定轴转动，角速度为常值 ω 。在以下分析中，假设受扰量是微小的，略去高阶项。

（1）轮滚动半径计算 (2 分)

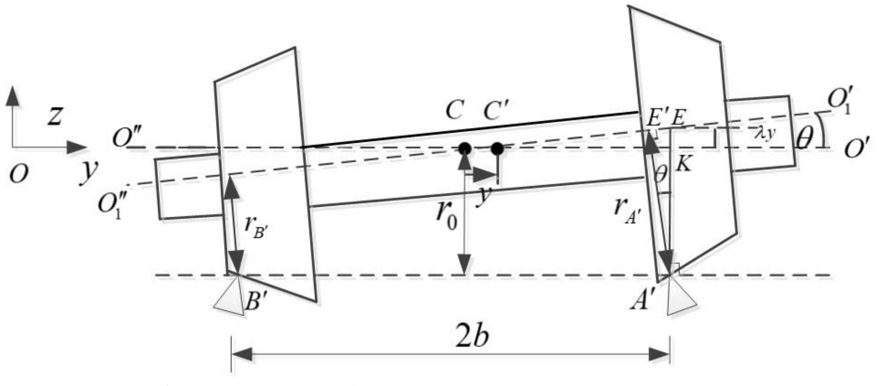


图 2 滚动半径简化计算图(前视图)

如图 2，为计算轮对一般位置时两轮的滚动半径，可将轮对从理想位置随质心平移 y ，同时绕通过质心的 x 轴转动 θ 角，轮对轴线由 $O'O''$ 变至 $O_1'O_1''$ 。过 A' 点作 $O_1'O_1''$ 垂线，记垂足为 E' ，由定义 $r_{A'} = A'E'$ ，其近似为

$A'E = A'K + KE$，其中 $A'K = r_0, KE \approx b\theta \approx \lambda y$，（$\lambda = \tan\alpha$ 称为锥度)，

E 是过 A' 点的铅垂线与 $O_1'O_1''$ 的交点；对 $r_{B'}$ 有类似结果。合之：

$$r_{A'} = r_0 + \lambda y, r_{B'} = r_0 - \lambda y \tag{1}$$

分值	说明
2	直接写出结果(1)：1.5 分；结合图给出结果(1)：2.0 分；有分析过程，但结果不正确：1.0 分。

（2）侧向恢复力计算（4 分）

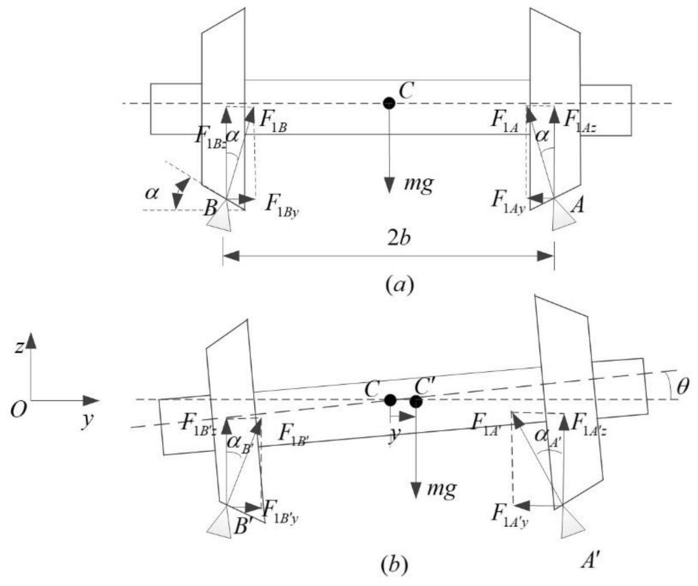


图 3 侧向恢复力计算简图(前视图)

如图 3（a)，在轮对的理想运动状态中，轮在接触点 A 和 B 点的约束力与铅垂线之间的夹角同为 α，$F_{1Az} = F_{1Bz} = mg/2$。

如图 3（b)，当轮对有侧向位移 y 时，$\alpha_{A'} = \alpha + \theta, \alpha_{B'} = \alpha - \theta$，其中 θ 是轮对轴线与水平线之间的夹角。由力矩平衡方程，容易得到每轮约束力铅垂方向的分量分别为 $F_{1A'z} = \dfrac{b+y}{2b}mg$，$F_{1B'z} = \dfrac{b-y}{2b}mg$。由于 α 很小和 θ 为微小量，两轮约束力在 y 方向的代数和，即侧向恢复力为：

$$
\begin{aligned}
F_{1y} &= F_{1B'y} - F_{1A'y} = \frac{b-y}{2b} mg \cdot \tan(\alpha-\theta) - \frac{b+y}{2b} mg \cdot \tan(\alpha+\theta) \\
&\approx \frac{b-y}{2b} mg \cdot (\alpha-\theta) - \frac{b+y}{2b} mg \cdot (\alpha+\theta) = mg(-\theta - \frac{\alpha}{b} y)
\end{aligned} \tag{2}
$$

利用$\alpha \approx \lambda$，又根据图 2 中的几何关系，有

$$b\theta = \lambda y \tag{3}$$

于是

$$F_{1y} = -(2mg\lambda / b)y \tag{4}$$

其中$2mg\lambda / b$称为重力刚度。

分值	说明
4	写出$F_{1A'z}$，$F_{1B'z}$：各 0.5 分；完整给出(2)：1 分；写出(3)式（或图上标注出）：1 分；结果(4)式：1 分；（有分析过程，结果不正确，酌情给分） 根据势能求广义力的方法，结果正确：4 分。

（3）力偶矩的计算 (2 分)

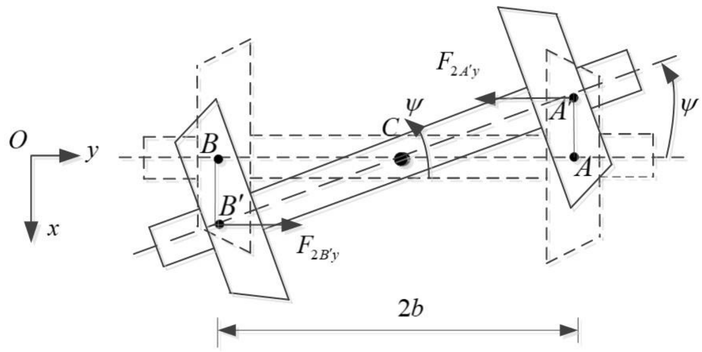


图 4 力偶矩的计算简图（俯视图）

如图 4，轮对绕z'轴转动ψ角， A点和B点分别运动至A'点和B'点，则

$$AA' = b\tan\psi \approx b\psi \tag{5}$$

轮在接触点受到水平反力

$$F_{2A'y} = F_{2B'y} \approx mg\lambda / 2 \tag{6}$$

$F_{2A'y}$与$F_{2B'y}$在同一水平面内形成一个力偶，力偶矩大小为

$$M \approx F_{2A'y}(AA' + BB') = \frac{mg\lambda}{2}(2b\psi) = mg\lambda b\psi \tag{7}$$

其中 $mg\lambda b$ 称为重力角刚度。

分值	说明
2	写出(5)：0.5 分；写出(6)：0.5 分；结果(7)：1 分； 根据势能求广义力的方法，结果正确：2 分。

（4）速度合成分析(8 分)

设 $\vec{v}_{A'}$ 和 $\vec{v}_{B'}$ 是轮与轨道接触点的速度（轮上点），并表示成

$$\vec{v}_{A'} = v_{A'x}\vec{i} + v_{A'y}\vec{j}\,,\ \vec{v}_{B'} = v_{B'x}\vec{i} + v_{B'y}\vec{j} \tag{8}$$

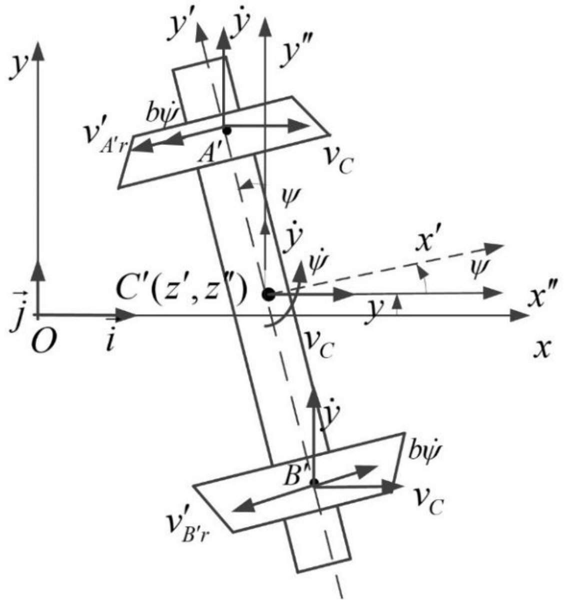


图 5 速度的合成(俯视图)

以下用系统状态变量 $(y,\dot{y},\psi,\dot{\psi})$ 来表示 $\vec{v}_{A'}$ 和 $\vec{v}_{B'}$。如图 5，取坐标系 $C'x''y''z''$ 为动系，考虑轮上 A' 点和 B' 点的速度，根据速度合成定理

$$\vec{v}_{A'} = \vec{v}_e + \vec{v}_{A'r}\,,\ \vec{v}_{B'} = \vec{v}_e + \vec{v}_{B'r} \tag{9}$$

其中

$$\vec{v}_e = v_c\vec{i} + \dot{y}\vec{j} \tag{10}$$

是牵连速度，$\vec{v}_{A'r}$ 和 $\vec{v}_{B'r}$ 是相对速度。设 $\vec{v}'_{A'r}$ 和 $\vec{v}'_{B'r}$ 分别是轮上 A' 点和 B' 点相对坐标系 $C'x'y'z'$ 的速度，则 $v'_{A'r} = r_{A'}\omega,\ v'_{B'r} = r_{B'}\omega$。先用速度合成法求出 $\vec{v}_{A'r}$ 和 $\vec{v}_{B'r}$，并表示如下：

$$\vec{v}_{A'r} = \left[-r_{A'}\omega - (b-y)\dot{\psi}\right]\cos\psi\vec{i} + \left[-r_{A'}\omega - (b-y)\dot{\psi}\right]\sin\psi\vec{j}$$
$$\approx -(r_{A'}\omega + b\dot{\psi})\vec{i} - r_{A'}\omega\psi\vec{j} \tag{11}$$

$$\vec{v}_{B'r} = \left[-r_{B'}\omega + (b+y)\dot{\psi}\right]\cos\psi\vec{i} + \left[-r_{B'}\omega + (b+y)\dot{\psi}\right]\sin\psi\vec{j}$$
$$\approx (-r_{B'}\omega + b\dot{\psi})\vec{i} - r_{B'}\omega\psi\vec{j} \tag{12}$$

将(10),(11),(12)和(1)代入(9)，可得

$$\begin{cases} v_{A'x} = v_c + v_{A'rx} = r_0\omega - (r_0 + \lambda y)\omega - b\dot{\psi} = -\lambda\omega y - b\dot{\psi} \\ v_{A'y} = \dot{y} + v_{A'ry} = \dot{y} - (r_0 + \lambda y)\omega\psi = \dot{y} - r_0\omega\psi \end{cases} \tag{13}$$

及

$$\begin{cases} v_{B'x} = v_c - r_{B'}\omega + b\dot{\psi} = r_0\omega - (r_0 - \lambda y)\omega + b\dot{\psi} = \lambda\omega y + b\dot{\psi} \\ v_{B'y} = \dot{y} - r_{B'}\omega\psi = \dot{y} - (r_0 - \lambda y)\omega\psi = \dot{y} - r_0\omega\psi \end{cases} \tag{14}$$

分值	说明
8	1）正确选择了动点和动系：2 分； 2）正确给出牵连速度(10)：1 分； 3）在求相对速度中，正确应用了速度合成概念：1 分； 4）正确给出(11)、(12)：2 分； 5）正确给出(13)、(14)：2 分。

（5）蠕滑力表达式(4 分)

由题中蠕滑力公式，利用(13)和(14)，得

$$\begin{cases} F_{A'x} = -f\dfrac{v_{A'x}}{v_c} = -f\dfrac{-\lambda\omega y - b\dot{\psi}}{r_0\omega} = \dfrac{f\lambda}{r_0}y + \dfrac{fb}{r_0\omega}\dot{\psi} \\ F_{A'y} = -f\dfrac{v_{A'y}}{v_c} = -f\dfrac{\dot{y} - r_0\omega\psi}{r_0\omega} = -\dfrac{f}{r_0\omega}\dot{y} + f\psi \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} F_{B'x} = -f\dfrac{v_{B'x}}{v_c} = -f\dfrac{\lambda\omega y + b\dot{\psi}}{r_0\omega} = -\dfrac{f\lambda}{r_0}y - \dfrac{fb}{r_0\omega}\dot{\psi} \\ F_{B'y} = -f\dfrac{v_{B'y}}{v_c} = -f\dfrac{\dot{y} - r_0\omega\psi}{r_0\omega} = -\dfrac{f}{r_0\omega}\dot{y} + f\psi \end{cases} \tag{16}$$

分值	说明
4	(15)和(16)中的四个蠕滑力分量 $F_{A'x,}F_{A'y},F_{B'x},F_{B'y}$ 表达式： 每个正确各 1 分。

（6）运动微分方程(8 分)

由质心运动定理（ y 方向），以及关于对 z' 轴的动量矩定理，可得轮对的

运动微分方程

$$m\ddot{y}=F_{A'y}+F_{B'y}+F_{1y} \tag{17}$$

$$J\ddot{\psi}=M_{C'}(\boldsymbol{F}_{A'})+M_{C'}(\boldsymbol{F}_{B'})+M \tag{18}$$

将(15)的第 2 式、(16)的第 2 式和(4)代入(17)，得

$$m\ddot{y}=F_{A'y}+F_{B'y}+F_{1y}=-2f(\frac{\dot{y}}{v_c}-\psi)-(2mg\frac{\lambda}{b})y \tag{19}$$

将(15)，(16)和(7)代入(18)，得

$$\begin{aligned}J\ddot{\psi}&=-F_{A'x}b\cos\psi+F_{B'x}b\cos\psi\\&\quad-F_{A'y}b\sin\psi+F_{B'y}b\sin\psi+M\\&\approx-(\frac{f\lambda}{r_0}y+\frac{fb}{r_0\omega}\dot{\psi})b+(-\frac{f\lambda}{r_0}y-\frac{fb}{r_0\omega}\dot{\psi})b\\&\quad-(-\frac{f}{r_0\omega}\dot{y}+f\psi)b\psi+(-\frac{f}{r_0\omega}\dot{y}+f\psi)b\psi+mg\lambda b\psi\\&=-2fb(\frac{\lambda}{r_0}y+\frac{b}{v_c}\dot{\psi})+mg\lambda b\psi\end{aligned} \tag{20}$$

联立(19)和(20)，得

$$\begin{cases}m\ddot{y}+2f(\dfrac{\dot{y}}{v_c}-\psi)+2mg\dfrac{\lambda}{b}y=0\\J\ddot{\psi}+2fb(\dfrac{\lambda}{r_0}y+\dfrac{b}{v_c}\dot{\psi})-(mg\lambda b)\psi=0\end{cases} \tag{21}$$

分值	说明
8	1）正确选择了建立关于 y 和 ψ 运动微分方程的原理，如(17)和(18)，不限建立方程的方法：2 分； 2）正确给出(19)（或对应的方程）：2 分； 3）正确给出(20)（或对应的方程）：2 分； 4）正确给出(21)：2 分。 5）如果建立了轮对更多自由度的模型，并最后简化得到(21)，算正确，并可酌情给分。

（7）设 $f=0$，给出运动微分方程组的解，并判断是否收敛(2 分)

如在(21)中，令 $f=0$，此方程变为：

$$\begin{cases}\ddot{y}+\omega_1^2y=0\\\ddot{\psi}-\omega_2^2\psi=0\end{cases} \tag{22}$$

其中 $\omega_1 = \sqrt{2g\lambda / b}, \omega_2 = \sqrt{mg\lambda b / J}$ 。(22)的通解为

$$y = c_1 \sin \omega_1 t + c_2 \cos \omega_1 t,\ \psi = c_3 e^{-\omega_2 t} + c_4 e^{\omega_2 t} \tag{23}$$

其中 $c_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 是积分常数，解(23)一般是发散的，这是由于 ψ 方向刚度为负的缘故。实际上，蠕滑力抑制了系统的发散过程。

分值	说明
2	1）正确写出(22)：1 分； 2）正确写出解(23)，并指出其发散性：1 分。