

第十四届全国周培源大学生力学竞赛

(个人赛) 试题

出题学校：西南交通大学

(本试卷分为基础题和提高题两部分，满分 **120** 分，时间 **3** 小时 **30** 分)

说明：个人赛奖项分为全国特、一、二、三等奖和优秀奖。全国特、一、二等奖评选标准是：提高题得分进入全国前 5%，并且总得分排在全国前列，根据总得分名次最终确定获奖人。全国三等奖和优秀奖直接按赛区内总得分排名确定获奖人。

注意：试题请全部在答题纸上作答，否则作答无效。各题所得结果用分数或小数表示均可。

第一部分 基础题（共 60 分）

第 1 题（15 分）

图 1 所示组合梁的自重及变形不计， A 为固定端， B 为铰链， ABD 水平。均质物块 C 放在倾角为 α 的斜面上，用绳绕过定滑轮，与梁 BD 连接，图示位置绳的 ME 段水平。已知图中尺寸 a ，物块重 P ，高 h ， $\alpha=30^\circ$ ，系统处于平衡状态。

- (1) 不计各处摩擦，求物块宽度 b 的最小值 b_{\min} （3 分）；
- (2) 不计各处摩擦，当 $b \geq b_{\min}$ ，求铅垂三角形分布最大荷载集度 q 的大小及固定端的约束力（4 分）；
- (3) 设物块与斜面之间的静摩擦因数 $f_s = 0.3$ ， $b = h/3$ ，其余各处摩擦不计。分别求荷载集度 q 的范围、固定端约束力的范围（5 分）；
- (4) 由 (3) 的荷载集度最大值 q_{\max} 求组合梁最大弯矩值及所在的横截面位置（3 分）。

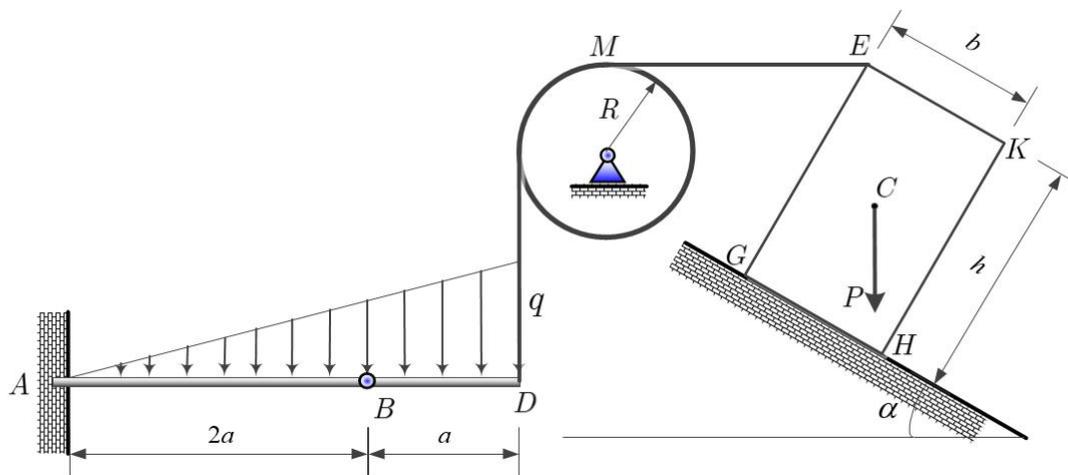


图 1

第 2 题 (15 分)

在铅垂面内的齿轮系统如图 2 所示, 齿轮 1 与齿轮 2 在 D 点啮合, 曲柄上作用有一个力偶, 其力偶矩 M 为常值。齿轮 1 半径为 r , 质量为 m ; 齿轮 2 半径为 $R=2r$, 质量为 $4m$; 曲柄质量为 m ; 齿轮 1 和齿轮 2 视为均质圆盘, 圆心分别在 C_1 和 C_2 点; 另有一集中质量 $m/2$ 焊接在齿轮 2 的 C_0 处, $\overline{C_2C_0} = e = r/4$; 曲柄视为均质直杆, 其质心为 C 点。齿轮 2 的转角用 φ 表示, 曲柄的转角用 θ 表示。

- (1) 给出该系统的自由度 (2 分);
- (2) 建立系统的运动微分方程 (8 分);
- (3) 求系统的平衡位置, 并判定其稳定性 (5 分)。

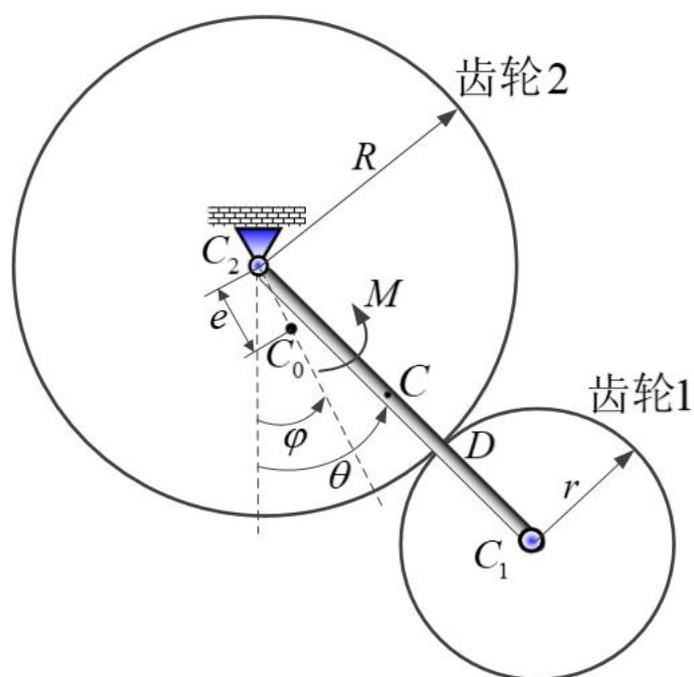


图 2

第 3 题 (12 分)

如图 3 所示，长度为 l 的矩形截面简支梁受到集度为 q 的均布荷载作用。梁横截面尺寸为 $b \times h$ ， C 为横截面的形心，材料为低碳钢。

(1) 若梁某横截面上的剪力为 F_S 、弯矩为 M ，求该横截面上图示阴影区域合力的大小（用 F_S 和 M 表示）（2 分）；

(2) 以支座 A 为坐标原点建立图示坐标系，求梁内任意一点的第三强度理论相当应力（表示成该点位置坐标 x, y, z 的函数）（2 分）；

(3) 若材料的许用应力为 $[\sigma]$ ，试确定该梁内危险点的位置，并根据第三强度理论列出危险点的强度条件（8 分）。

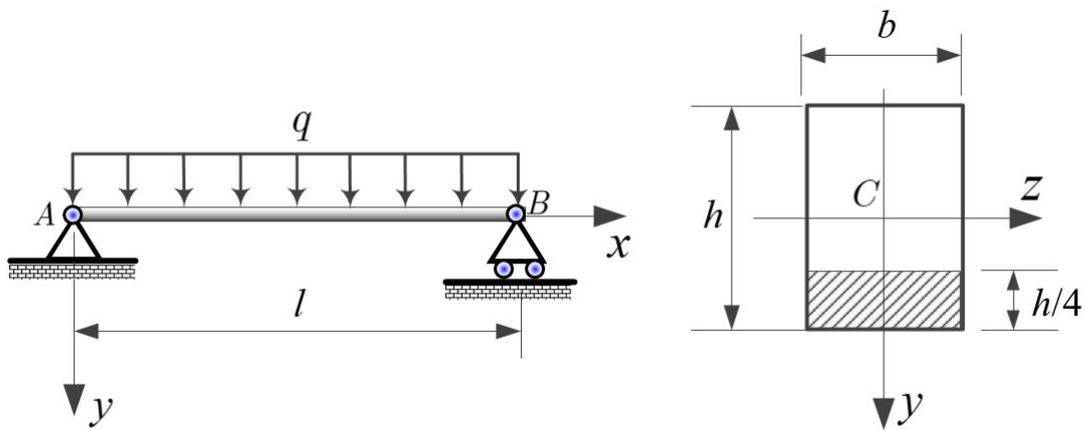


图 3

第 4 题 (18 分)

如图 4 所示, x', y', z' 轴分别与 x, y, z 轴平行。半径 $R=800$ mm 的四分之一圆弧曲杆 CD 处于水平面 $x'y'$ 内, 其横截面直径 $d=50$ mm, 材料为低碳钢, 弹性模量 $E=210$ GPa, 剪切模量 $G=80$ GPa, 固定端 D 的顶部贴有一应变片, 其方向与曲杆母线成 45° 角。等直细长杆 AB 和 AH 铰接组成的支架位于铅垂面 yz 内, B 和 H 为固定铰支座。仅考虑杆 AB 和 AH 在 yz 面内的稳定性, 所对应的最小截面弯曲刚度 $EI_{AB}=4000$ N·m²、 $EI_{AH}=3000$ N·m²。铰链 A 在端面 C 的正下方, 端面 C 的底部与铰链 A 之间有 $\delta=2$ mm 的间隙。重量 $P=200$ N 的重物自由下落 $h=1000$ mm, 冲击到端面 C 的顶部后, 一起向下运动。当重物运动到最低点时, 测得线应变 $\varepsilon_{45^\circ}=500 \times 10^{-6}$ 。

- (1) 求杆 AB 和 AH 的临界力 (2 分);
- (2) 校核杆 AB 和 AH 的稳定性 (14 分);
- (3) 分析应如何调整杆 AB 和 AH 横截面的惯性矩的比值, 以提高结构的稳定性 (2 分)。

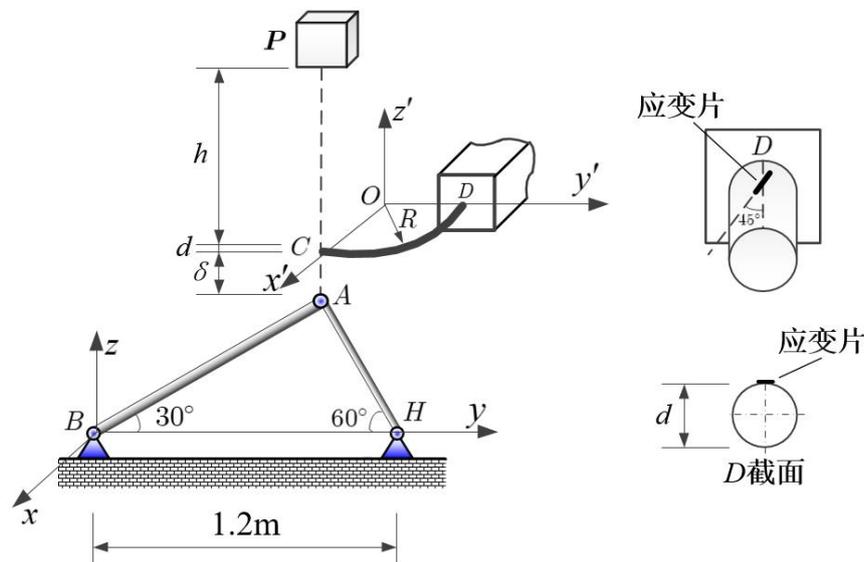


图 4

第二部分 提高题（共 60 分）

第 5 题（30 分）

儿童手持分段线弹性等直杆用细线拉着纸飞机匀速跑动，杆 D 端承受细线的水平拉力 F ，如图 5(a)所示。杆 A 端视为固定端，变形前处于铅垂状态，如图 5(b)所示。杆的几何及材料参数如下表所示：

	长度	外径	内径	弹性模量
空心杆 AB	$l=600$ mm	$D_1=10$ mm	$d_1=6$ mm	$E_1=100$ GPa
空心杆 BC	$l=600$ mm	$D_2=6$ mm	$d_2=2$ mm	$E_2=100$ GPa
实心杆 CD	$l=600$ mm	$D_3=2$ mm	$d_3=0$ mm	$E_3=10$ GPa

试求：

- (1) 当 $F=1$ N 时， C 处的挠度 w_C 和转角 θ_C （6 分）；
- (2) 当杆端 D 横截面发生大转角 $\theta_D=\frac{\pi}{4}$ 时，拉力 F 和挠度 w_D （24 分）。

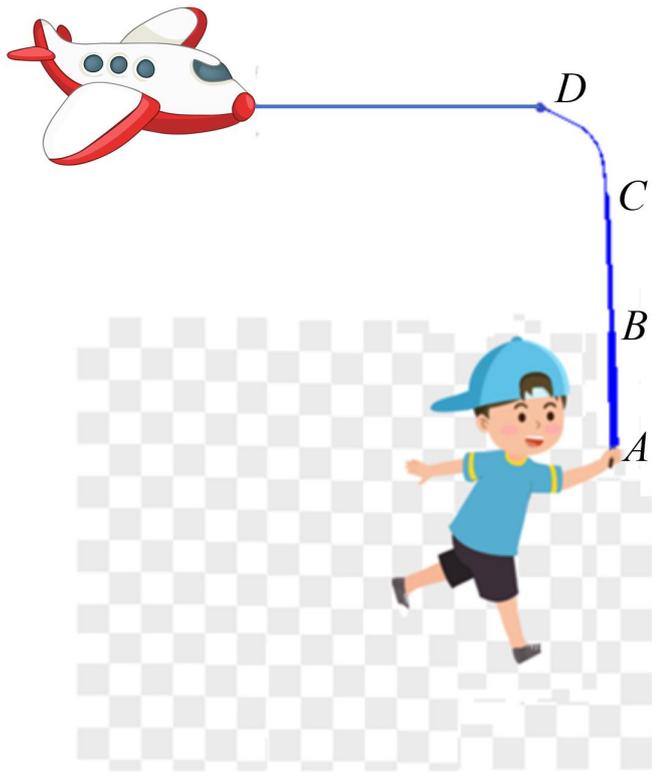
说明：为简化计算，求解时可使用如下椭圆积分近似公式：

$$F(\phi, k) = \int_0^{\sin\phi} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}\sqrt{1-k^2t^2}} = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} d\psi$$

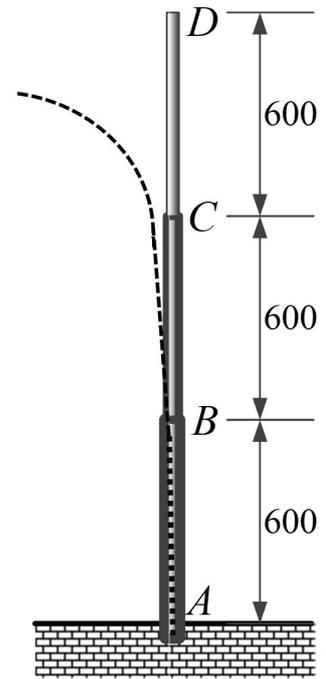
$$\approx \phi + \frac{1}{2} k^2 \int_0^\phi \sin^2\psi d\psi + \frac{1 \times 3}{2 \times 4} k^4 \int_0^\phi \sin^4\psi d\psi, \quad |k| < 1$$

$$E(\phi, k) = \int_0^{\sin\phi} \frac{\sqrt{1-k^2t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2\psi} d\psi$$

$$\approx \phi - \frac{1}{2} k^2 \int_0^\phi \sin^2\psi d\psi - \frac{1}{2 \times 4} k^4 \int_0^\phi \sin^4\psi d\psi, \quad |k| < 1$$



(a)



(b)

图 5

第 6 题 (30 分)

如图 6-1 所示, 列车轮对由两个刚性轮和一根刚性轴固结而成, 车轮简化为顶角为 2α 的锥面体 (α 为微小常量), 轨道简化为相距 $2b$ 的两条平行线, 车轮与轨道为点接触。如图 6-2(a) 所示, 轮对质心为 C , $v_C = r_0\omega$, r_0 为轮对理想运动时车轮的滚动半径(接触点到轴线的距离), ω 为轮对的角速度; 如图 6-2(b) 所示, 在实际运动中, 轮对会发生微小侧向位移 y , 和绕通过质心的铅垂轴的微小转角 ψ 。设轮对的质量为 m 、绕通过质心的铅垂轴的转动惯量为 J 。不计二阶及以上的高阶小量, 求:

(1) 如图 6-3(a) 所示, 当轮对发生侧移时 ($y \neq 0$, $\psi = 0$), 两轮的滚动半径 r_A 、 r_B 是 y 的函数, 给出它们的表达式 (2 分);

(2) 如图 6-3(a) 所示, 当轮对发生侧移时 ($y \neq 0$, $\psi = 0$), 轨道对车轮的法向力在 y 方向的合力形成了侧向恢复力 F_{ly} , 将其表示成 y 的函数 (4 分);

(3) 如图 6-3(b) 所示, 当轮对绕通过质心的铅垂轴转动时 ($y = 0$, $\psi \neq 0$), 轨道对车轮的法向力在 y 方向的分量 F_{2Ay} 和 F_{2By} 形成一个力偶, 试将其力偶矩大小 M 表示成 ψ 的函数 (2 分);

(4) 如图 6-2 所示, 试用 y 、 ψ 、 \dot{y} 、 $\dot{\psi}$ 表示轮与轨道接触点(轮上的点) A' 和 B' 的绝对速度, 并写成 $\mathbf{v}_{A'} = v_{Ax}\mathbf{i} + v_{Ay}\mathbf{j}$, $\mathbf{v}_{B'} = v_{Bx}\mathbf{i} + v_{By}\mathbf{j}$ 的形式 (8 分);

(5) 根据 (4) 的结果, 利用公式计算作用在车轮上接触点的蠕滑力:

$$F_{A'x} = -f \frac{v_{A'x}}{v_C}, F_{A'y} = -f \frac{v_{A'y}}{v_C}; F_{B'x} = -f \frac{v_{B'x}}{v_C}, F_{B'y} = -f \frac{v_{B'y}}{v_C} \quad (f \text{ 为已知常量})(4 \text{ 分});$$

(6) 利用上述结果, 建立轮对的侧向与绕质心铅垂轴转动的运动微分方程 (8 分);

(7) 设 $f = 0$, 给出运动微分方程组的解, 并判断是否收敛 (2 分)。

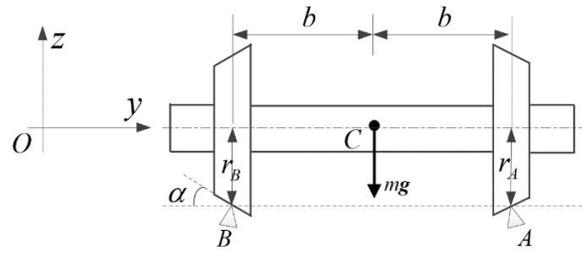


图 6-1 轮对的理想运动状态 ($r_A = r_B = r_0$)

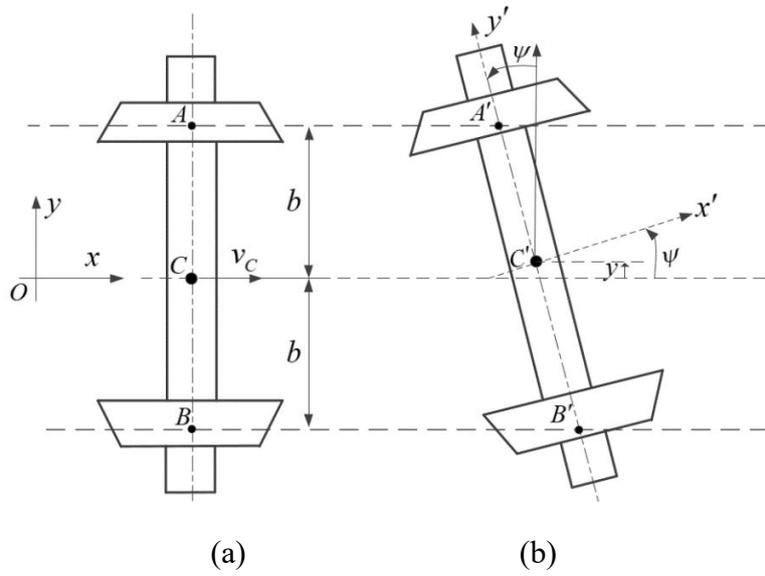


图 6-2 轮对运动的描述

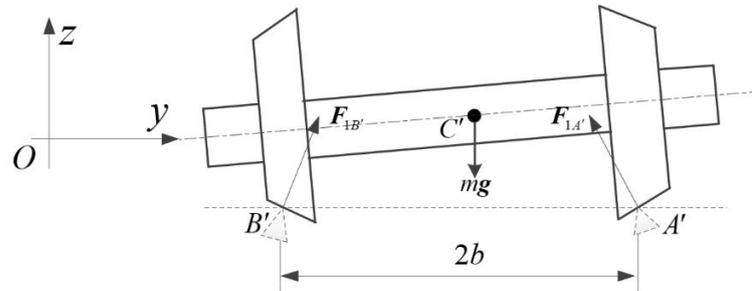


图 6-3 (a) 侧向力计算简图

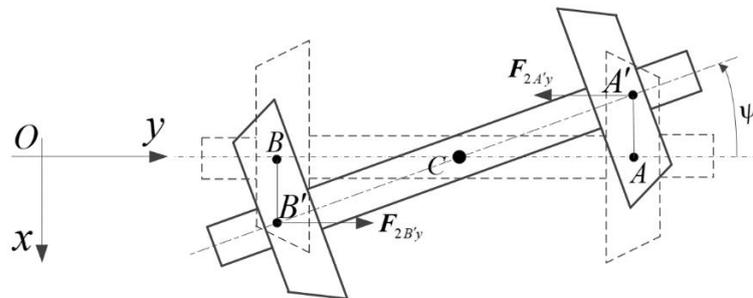


图 6-3 (b) 力偶计算简图