# 第十三届全国周培源大学生力学竞赛（个人赛）试题参考答案及详细解答

出题学校：南京航空航天大学

（本试卷分为基础题和提高题两部分，满分 **120** 分，时间 **3** 小时 **30** 分）

## 评分总体原则

采用扣分制或加分制。采用扣分制时，建议最终所扣分数总和不超过题目（或问题）总分的一半。采用加分制时，建议最终所给分数总和不超过题目（或问题）总分的一半。如果学生的解题方法和参考答案不同，则按以下几种情况分别处理：

（1）如果学生给出的最终结果和参考答案相同，建议采用扣分制：侧重检查学生的解题过程有无不严谨的地方或小的概念错误（未影响结果），如果有的话，建议每一处错误可酌情扣 1~2 分。

（2）如果学生给出的最终结果和参考答案不同：

（A）如果学生解答的总体思路合理、清晰，建议采用扣分制：在检查学生的解题过程时侧重区分某错误是概念错误还是计算错误。建议对于每一处概念错误扣 5 分或以上，对每一处计算错误酌情扣 1~2 分。对于由一处计算错误所引起的后续计算结果错误，只按一次错误扣分，计算错误不累计扣分。

（B）如果学生解答的总体思路不清晰，建议采用加分制：在检查学生的解题过程时侧重寻找其局部正确、合理的部分，酌情给分。

# 一、参考答案

## 第一部分 基础题部分参考答案（共 60 分）

**第 1 题 (18 分)**

1）$\omega_{CDE}=-\omega$，$\omega_{C_1DE_1}=\omega$ （5 分）

2）$F=\dfrac{\sqrt{2}M}{2a}+4ka(\sqrt{2}-1)$ （5 分）

3）$\alpha_{ABC}=\dfrac{3}{8ma^2}[M+4ka^2(2-\sqrt{2})]$ （8 分）

**第 2 题 (12 分)**

1）$\dfrac{\omega_{B1}}{\omega_{B0}}=\dfrac{5}{8}$ （3 分）

2）$\omega_{A1\min}=\dfrac{4}{5}\sqrt{\dfrac{3(2-\sqrt{3})g}{R}}$ （4 分）

3）$25\sin\theta-39[1-\cos(30^\circ-\theta)]\geq 0$ （5 分）

**第 3 题 (15 分)**

1）$F_{\mathrm{AC}}=F_{\mathrm{BC}}=7.338\mathrm{kN}$（拉）　$F_{\mathrm{CD}}=F_{\mathrm{CE}}=10.377\mathrm{kN}$（拉） （7 分）

2）$F_{\mathrm{AC}}=F_{\mathrm{BC}}=33.125\mathrm{kN}$（拉）　$F_{\mathrm{CD}}=F_{\mathrm{CE}}=43.155\mathrm{kN}$（压） （8 分）

**第 4 题 (15 分)**

1）$M_e=\dfrac{E\pi D^3}{32(1+\mu)\cos^2\beta}\Delta\beta_1$ （5 分）

2）$F=\dfrac{E\pi D^2}{2(1+\mu)\sin 2\beta}\Delta\beta_2$ （5 分）

3）$\beta=22.5^\circ$ （5 分）

# 第二部分 提高题部分参考答案（共 60 分）

**第 5 题 (15 分)**

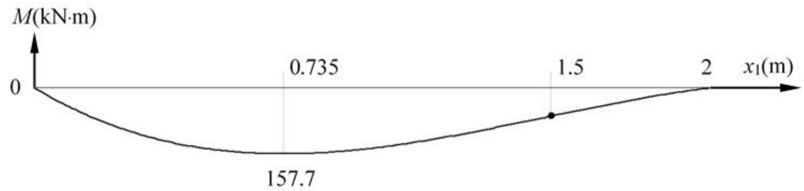
1）当$\theta$=0°或$\theta$=180°时，解不唯一。因为这是一个奇异位置。（2 分）

当$\theta$=90°时，$F=1735.96\text{kN}(\uparrow)$（3 分）

2）连杆 $AB$ 最大组合应力为最大弯曲拉应力与轴力引起的拉应力叠加：

$$\sigma(x_1)_{\max}=166.6\text{MPa}\le[\sigma]=180\text{MPa}$$（7.5 分）

弯矩图大致形状如下图所示：




其中，$x_1=0.735\text{m}$时，$M_{\max}=-157.7\text{kN}\cdot\text{m}$；$x_1=1.5\text{m}$时，产生拐点。（2.5 分）

**第 6 题 (25 分)**

1）以过系统质心 $C$ 的铅垂线与距离地面$\frac{1}{2}h$的水平面的交点为圆心、$\frac{1}{3}R$为半径的水平面内的圆周。（3 分）

2）$s=\frac{\sqrt{7}}{2}h$（6 分）

3）$F_N=\frac{13}{5}mg$（6 分）

4）$d=\frac{1}{13}\sqrt{9[R+\frac{3z_A}{2R}(\frac{h}{2}-z_A)]^2+3(z_A-\frac{h}{2})^2}$（10 分）

**第 7 题 (20 分)**

1）$\sigma_m=\frac{\rho_w g\tan\alpha}{2\delta\cos\alpha}(h-\frac{2}{3}y)y+\frac{\rho_c g}{2\cos^2\alpha}y$（6 分）

2）$\sigma_t=\frac{\rho_w g\tan\alpha(h-y)y}{\delta\cos\alpha}+y\rho_c g\tan^2\alpha$（6 分）

3）内壁：$\sigma_{r3}=16\rho_w gh$（或外壁：$\sigma_{r3}=15.5\rho_w gh$）（8 分）

# 二、详细解答及评分标准

## 第一部分 基础题部分详细解答及评分标准（共 60 分）

**第 1 题 (18 分)**

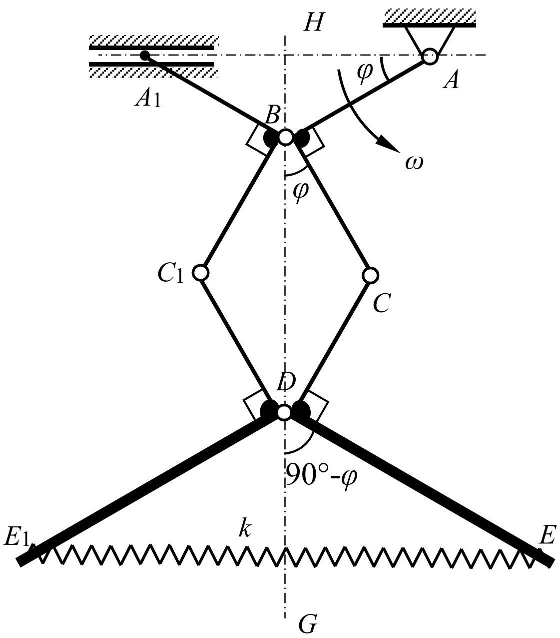
**解法 1：**

1）（本小题 5 分）

**解法 A：**平面运动刚体的角速度与基点选择无关，由图中的几何关系可得

$$\omega_{CDE}=\frac{\mathrm{d}\angle GDE}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(90^\circ-\varphi)}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=-\omega \qquad \text{（2.5 分）}$$

$$\omega_{C_1DE_1}=\frac{\mathrm{d}\angle HDC_1}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\omega \qquad \text{（2.5 分）}$$




**解法 B：**应用平面运动速度分析的基点法

$$\boldsymbol{v}_{A_1}=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{A_1B}$$

上式向铅垂方向投影得

$$\omega a\cos\varphi+\omega_{A_1BC_1}a\cos\varphi=0$$

$$\omega_{A_1BC_1}=-\omega$$ （1 分）

对直角弯杆 $CDE$，有

$$\boldsymbol{v}_D=\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{DC}$$ （1）

对直角弯杆 $C_1DE_1$，有

$$\boldsymbol{v}_D=\boldsymbol{v}_{C_1}+\boldsymbol{v}_{DC_1}=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{C_1B}+\boldsymbol{v}_{DC_1}$$ （2）

由式（1）和（2）得

$$\boldsymbol{v}_C+\boldsymbol{v}_{DC}=\boldsymbol{v}_B+\boldsymbol{v}_{C_1B}+\boldsymbol{v}_{DC_1}$$ （3）（2 分）

式（3）向 $C_1D$ 方向投影得

$$v_C\cos45^\circ+v_{DC}\cos(90^\circ-2\varphi)=v_B+v_{C_1B}\cos(90^\circ-2\varphi)$$

$$\omega\cdot2a\cos45^\circ\cdot\cos45^\circ+\omega_{CDE}\cdot a\cos(90^\circ-2\varphi)=\omega a+\omega_{A_1BC_1}a\cos(90^\circ-2\varphi)$$

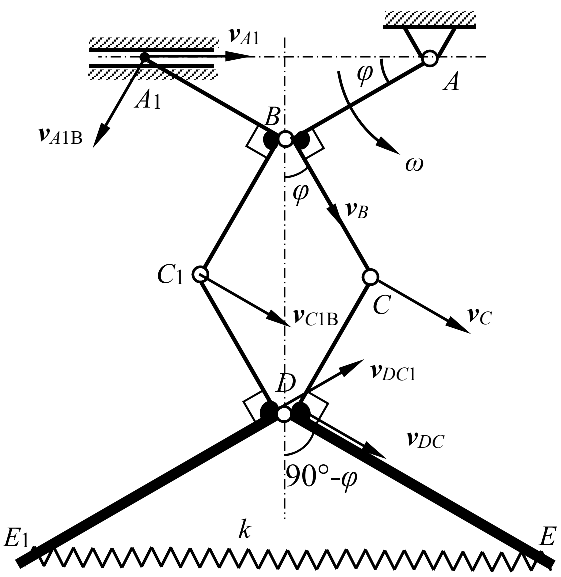
$$\omega_{CDE}=\omega_{A_1BC_1}=-\omega$$ （1 分）

式（3）向 $CD$ 方向投影得

$$v_C\cos(45^\circ+2\varphi)=v_B\cos2\varphi-v_{DC_1}\cos(90^\circ-2\varphi)$$

$$\omega\cdot2a\cos45^\circ\cdot\cos(45^\circ+2\varphi)=\omega a\cos2\varphi-\omega_{C_1DE_1}a\cos(90^\circ-2\varphi)$$

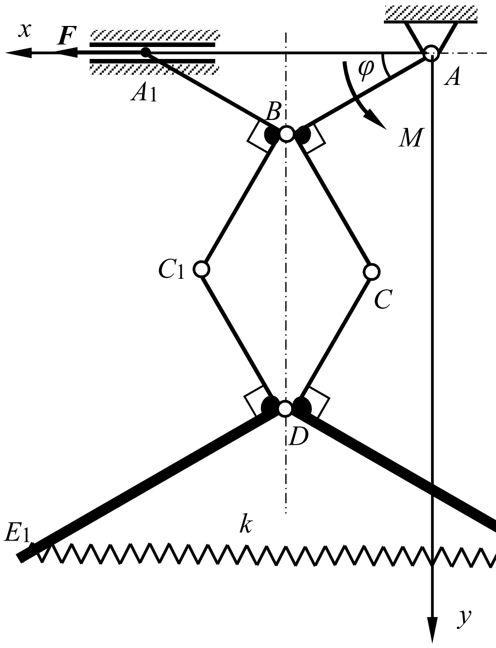
$$\omega_{C_1DE_1}=\omega$$ （1 分）



2）（本小题 5 分）

应用虚功原理求解。建立图示固定的直角坐标系 $Axy$，则系统的重力势能为

$$V_1 = 2V_{DE} = -2(2a\sin\varphi + 2a\cos\varphi)mg$$
$$= -4(\sin\varphi + \cos\varphi)amg \qquad (4)（1 分）$$




弹簧的弹性势能为

$$V_2 = \frac{1}{2}k(EE_1 - 2a)^2 = 2ka^2(2\cos\varphi - 1)^2 \qquad (5)（1 分）$$

$$x_{A_1} = 2a\cos\varphi \qquad \delta x_{A_1} = -2a\sin\varphi\delta\varphi \qquad （1 分）$$

由虚功原理

$$M\delta\varphi + F\delta x_{A_1} - \delta(V_1 + V_2) = 0 \qquad （1 分）$$

得

$$M\delta\varphi - F\cdot 2a\sin\varphi\delta\varphi - [-4(\cos\varphi - \sin\varphi)amg - 8ka^2(2\cos\varphi - 1)\sin\varphi]\delta\varphi = 0$$

将 $\varphi$=45° 代入，解得

$$F = \frac{\sqrt{2}M}{2a} + 4ka(\sqrt{2} - 1) \qquad （1 分）$$

***（说明：这里也可以不写重力势能和弹性势能，直接计算重力和弹簧力的虚功，共 2 分）***

3）（本小题 8 分）

应用第二类拉格朗日方程求解，选 $\varphi$ 作为广义坐标。在图示固定的直角坐标系 $Axy$ 中，杆 $DE$ 质心的速度为

$$v_{DEx}=\frac{\mathrm{d}x_{DE}}{\mathrm{d}t}=0$$

$$v_{DEy}=\frac{\mathrm{d}y_{DE}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(2a\sin\varphi+2a\cos\varphi)}{\mathrm{d}t}=2a\dot{\varphi}(\cos\varphi-\sin\varphi)$$

杆 $DE_1$ 质心的速度为

$$v_{DE_1x}=\frac{\mathrm{d}x_{DE_1}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(2a\cos\varphi)}{\mathrm{d}t}=-2a\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$v_{DE_1y}=v_{DEy}=2a\dot{\varphi}(\cos\varphi-\sin\varphi)$$

系统的动能

$$\begin{aligned}T&=T_{DE}+T_{DE_1}\\&=\frac{1}{2}m(v_{DEx}^2+v_{DEy}^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ma^2\dot{\varphi}^2+\frac{1}{2}m(v_{DE_1x}^2+v_{DE_1y}^2)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}ma^2\dot{\varphi}^2\\&=(\frac{13}{3}-4\sin2\varphi+2\sin^2\varphi)ma^2\dot{\varphi}^2\end{aligned}$$

（6）（3 分）

注意到式（4）-（5），系统的拉格朗日函数

$$\begin{aligned}L&=T-V\\&=(\frac{13}{3}-4\sin2\varphi+2\sin^2\varphi)ma^2\dot{\varphi}^2+4(\sin\varphi+\cos\varphi)amg-2ka^2(2\cos\varphi-1)^2\end{aligned}$$

（1 分）

对应于主动力偶 $M$ 的广义主动力为

$$M_{\varphi}=\frac{M\cdot\delta\varphi}{\delta\varphi}=M$$ （1 分）

代入第二类拉格朗日方程，得到系统的动力学微分方程

$$\begin{aligned}&2(\frac{13}{3}-4\sin2\varphi+2\sin^2\varphi)ma^2\ddot{\varphi}-(-8\cos2\varphi+2\sin2\varphi)ma^2\dot{\varphi}^2\\&\qquad-4(\cos\varphi-\sin\varphi)amg-8ka^2(2\cos\varphi-1)\sin\varphi=M\end{aligned}$$

（2 分）

将 $\varphi$=45°，$\dot{\varphi}$=0 代入上式，最后得

$$\ddot{\varphi}=\frac{3}{8ma^2}[M+4ka^2(2-\sqrt{2})]$$

$$\alpha_{ABC}=\ddot{\varphi}=\frac{3}{8ma^2}[M+4ka^2(2-\sqrt{2})]$$ （1 分）

*（说明：此处重力势能和弹性势能在 2）小题中给分了，这里不重复给分）*

**解法 2：**

1）（本小题 5 分），见解法 1

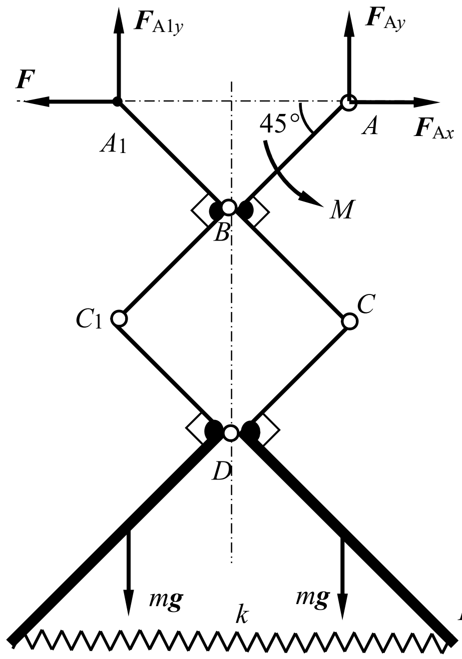
2）（本小题 5 分）

应用矢量静力学方法求解。

取整体为研究对象，由 $\sum M_A=0$ 得

$$M+mg\cdot 2a\cos 45^\circ-F_{A_1y}\cdot 2a\cos 45^\circ=0$$

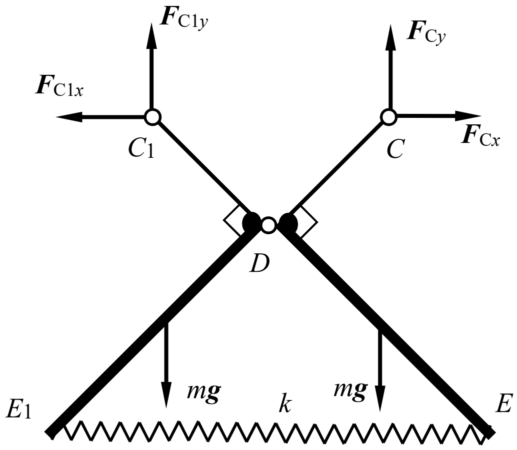
$$F_{A_1y}=\frac{\sqrt{2}M}{2a}+mg$$ （1）（1 分）




取直角弯杆 $CDE$、$C_1DE_1$ 连同弹簧为研究对象，由 $\sum M_C=0$ 得

$$mg\cdot 2a\cos 45^\circ-F_{C_1y}\cdot 2a\cos 45^\circ=0$$

$$F_{C_1y}=mg$$ （2）（1 分）



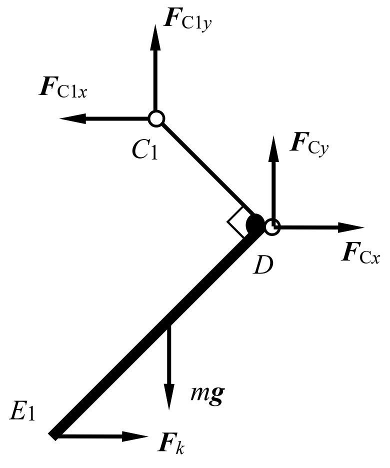

取直角弯杆 $C_1DE_1$ 为研究对象，其中

$$F_k = k\cdot(4a\cos 45^\circ - 2a) = 2ka(\sqrt{2}-1) \qquad （1 分）$$

由 $\sum M_D = 0$ 得

$$F_k \cdot 2a\sin 45^\circ + mg\cdot a\cos 45^\circ + F_{C_1x}\cdot a\sin 45^\circ - F_{C_1y}\cdot a\cos 45^\circ = 0$$

$$F_{C_1x} = -4ka(\sqrt{2}-1) \qquad （3）（1 分）$$

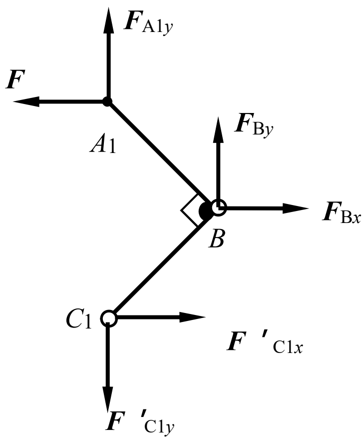



取直角弯杆 $A_1BC_1$ 为研究对象，由 $\sum M_B = 0$ 得

$$F'_{C_1x}\cdot a\sin 45^\circ + F'_{C_1y}\cdot a\cos 45^\circ + F\cdot a\sin 45^\circ - F_{A_1y}\cdot a\cos 45^\circ = 0$$

将式（1）-（3）代入上式得

$$F=\frac{\sqrt{2}M}{2a}+4ka(\sqrt{2}-1)$$ （4）（1 分）




*（说明：这里可以写出不同的平衡方程，只要能求出 F，即可得 5 分。）*

3）（本小题 8 分）

由第 1）小题得

$$\alpha_{CDE}=\frac{d\omega_{CDE}}{dt}=-\alpha_{ABC} \qquad \alpha_{C_1DE_1}=\frac{d\omega_{C_1DE_1}}{dt}=\alpha_{ABC}$$ （5）（1 分）

在图示固定的直角坐标系 $Axy$ 中，杆 $DE$ 质心的加速度为

$$v_{DEx}=\frac{dx_{DE}}{dt}=0 \qquad a_{DEx}=\frac{dv_{DEx}}{dt}=0$$

$$v_{DEy}=\frac{dy_{DE}}{dt}=\frac{d(2a\sin\varphi+2a\cos\varphi)}{dt}=2a\dot{\varphi}(\cos\varphi-\sin\varphi)$$

$$a_{DEy}=\frac{dv_{DEy}}{dt}=2a(\cos\varphi-\sin\varphi)\ddot{\varphi}+2a(-\sin\varphi-\cos\varphi)\dot{\varphi}^2$$

代入 $\varphi$=45°，$\dot{\varphi}$=0 得

$$a_{DEx}=0 \qquad a_{DEy}=0$$ （6）（1 分）

杆 $DE_1$ 质心的加速度为

$$v_{DE_1x}=\frac{dx_{DE_1}}{dt}=\frac{d(2a\cos\varphi)}{dt}=-2a\dot{\varphi}\sin\varphi$$

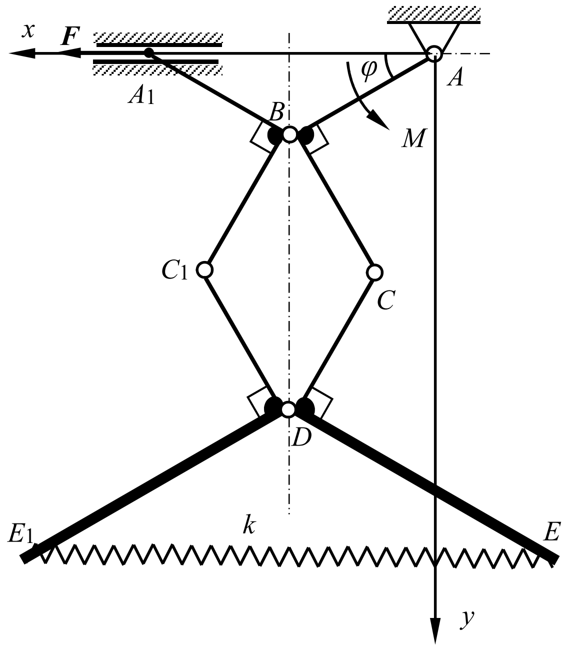
$$a_{DE_1x}=\frac{dv_{DE_1x}}{dt}=-2a\ddot{\varphi}\sin\varphi-2a\dot{\varphi}^2\cos\varphi$$

$$v_{DE_1y}=v_{DEy}=2a\dot{\varphi}(\cos\varphi-\sin\varphi)$$

$$a_{DE_1y}=a_{DEy}=2a(\cos\varphi-\sin\varphi)\ddot{\varphi}+2a(-\sin\varphi-\cos\varphi)\dot{\varphi}^2$$

代入$\varphi$=45°，$\dot{\varphi}$=0得

$$a_{DE_1x}=-\sqrt{2}a\ddot{\varphi}=-\sqrt{2}a\alpha_{ABC} \qquad a_{DE_1y}=0 \qquad (7)(1分)$$




***（说明：这里也可以应用刚体平面运动加速度分析的基点法求直角弯杆 CDE、C1DE1 的角加速度、杆 DE 质心的加速度和杆 DE1 质心的加速度，共得 3 分。）***

应用达朗贝尔原理，虚加杆 $DE$ 杆 $DE_1$ 的惯性力系

$$F_{IDE}=0 \qquad M_{IDE}=-\frac{1}{3}ma^2\alpha_{CDE}=\frac{1}{3}ma^2\alpha_{ABC}$$

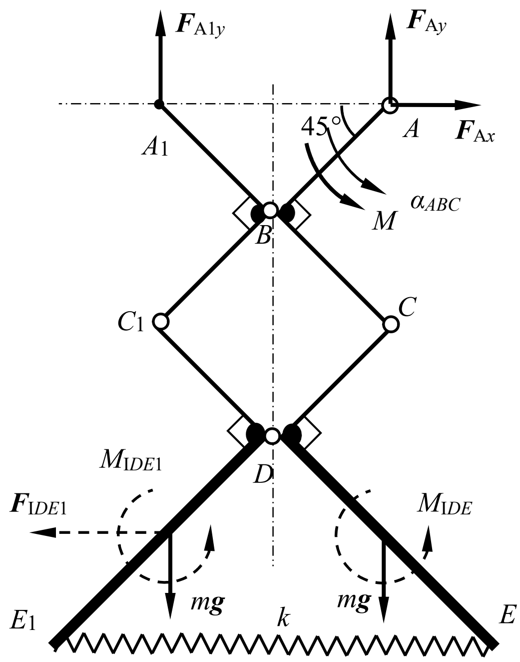
$$F_{IDE_1}=-ma_{DE_1x}=\sqrt{2}ma\alpha_{ABC} \qquad M_{IDE_1}=-\frac{1}{3}ma^2\alpha_{C_1DE_1}=-\frac{1}{3}ma^2\alpha_{ABC}$$

（1 分）

取整体为研究对象，由$\sum M_A=0$得

$$M+mg\cdot 2a\cos 45^\circ-F_{A_1y}\cdot 2a\cos 45^\circ+M_{IDE}+M_{IDE_1}-F_{IDE_1}\cdot 4a\sin 45^\circ=0$$

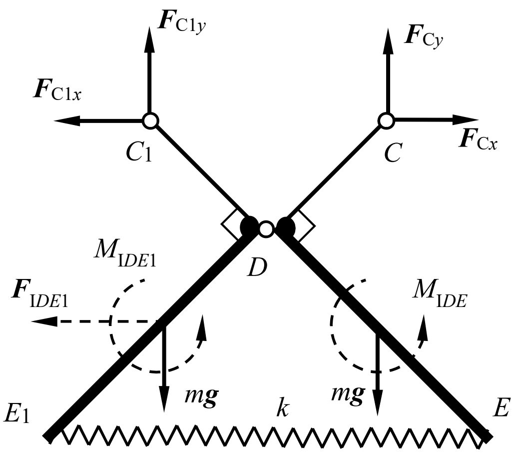
$$F_{A_1y}=\frac{\sqrt{2}M}{2a}+mg-2\sqrt{2}ma\alpha_{ABC} \qquad (8)(1分)$$




取直角弯杆 $CDE$、$C_1DE_1$ 连同弹簧为研究对象，由 $\sum M_C = 0$ 得

$$mg \cdot 2a\cos 45^\circ - F_{C_1y} \cdot 2a\cos 45^\circ + M_{IDE} + M_{IDE_1} - F_{IDE_1} \cdot 2a\sin 45^\circ = 0$$

$$F_{C_1y} = mg - \sqrt{2}ma\alpha_{ABC}$$ （9）（1 分）



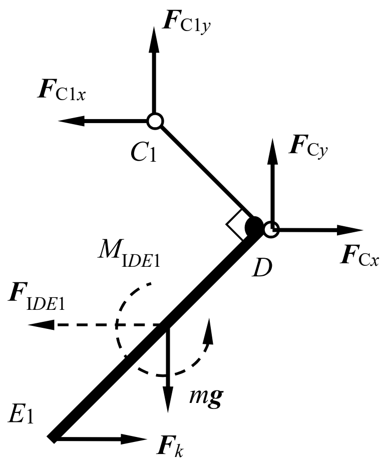

取直角弯杆 $C_1DE_1$ 为研究对象，其中

$$F_k = k \cdot (4a\cos 45^\circ - 2a) = 2ka(\sqrt{2} - 1)$$

由$\sum M_D = 0$得

$$F_k \cdot 2a\sin 45^\circ + mg \cdot a\cos 45^\circ + F_{C_1x} \cdot a\sin 45^\circ - F_{C_1y} \cdot a\cos 45^\circ$$
$$+ M_{IDE_1} - F_{IDE_1} \cdot a\sin 45^\circ = 0$$

$$F_{C_1x} = -4ka(\sqrt{2}-1) + \frac{\sqrt{2}}{3}ma\alpha_{ABC} \qquad （10）（1 分）$$

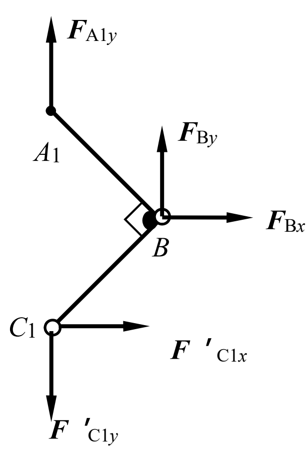



取直角弯杆 $A_1BC_1$ 为研究对象，由$\sum M_B = 0$得

$$F'_{C_1x} \cdot a\sin 45^\circ + F'_{C_1y} \cdot a\cos 45^\circ - F_{A_1y} \cdot a\cos 45^\circ = 0$$

将式（8）-（10）代入上式解得

$$\alpha_{ABC} = \frac{3}{8ma^2}[M + 4ka^2(2-\sqrt{2})] \qquad （11）（1 分）$$




*（说明：这里虚加惯性力系后，可以写出不同的平衡方程，只要能求出 αABC，即可得 4 分。）*

**第2 题 (12 分)**

1）（本小题 3 分）

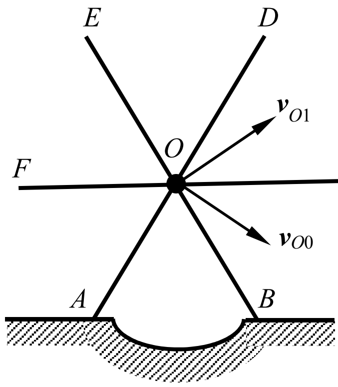
根据对 $B$ 点碰撞的动量矩定理，得

$$6mv_{O0}\cdot R\sin 30^0+J_{Oz}\omega_{B0}-J_{Bz}\omega_{B1}=0$$ （2 分）

$$v_{O0}=\omega_{B0}R$$

注意到 $J_{Oz}=6\times\frac{1}{3}mR^2=2mR^2$，$J_{Bz}=8mR^2$

$$\frac{\omega_{B1}}{\omega_{B0}}=\frac{5}{8}$$ （1）（1 分）




2）（本小题 4 分）

分析车轮轮心从最低点 $O$ 到最高点的运动过程，由动能定理得

$$\frac{1}{2}J_{Az}\omega_A^2-\frac{1}{2}J_{Az}\omega_{A1}^2=-6mg(R-R\cos 30^\circ)$$

$$\omega_A^2=\omega_{A1}^2-\frac{12}{J_{Az}}mg(R-R\cos 30^\circ)=\omega_{A1}^2-\frac{3(2-\sqrt{3})g}{4R}$$

由 $\omega_A\geq 0$ 得

$$\omega_{A1}\geq\sqrt{\frac{3(2-\sqrt{3})g}{4R}}$$ （2）（1 分）

同理，分析车轮轮心从最低点 $O_1$ 到最高点的运动过程，可得

$$\omega_{B1} \geq \sqrt{\frac{3(2-\sqrt{3})g}{4R}}$$ （1 分）

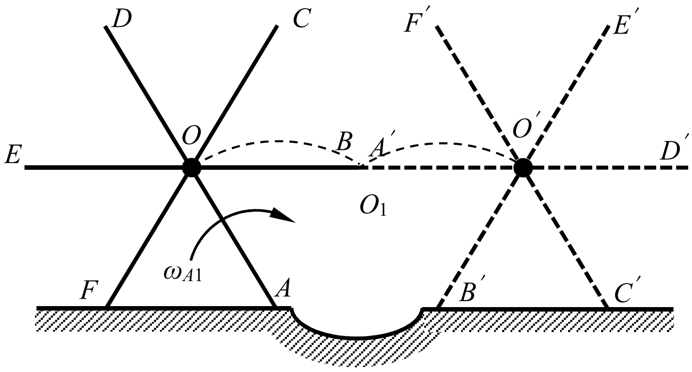
再由车轮轮心从 $O$ 点到 $O_1$ 点运动过程中车轮机械能守恒可得 $\omega_{B0}=\omega_{A1}$，代入式（1）得

$$\frac{\omega_{B1}}{\omega_{A1}}=\frac{\omega_{B1}}{\omega_{B0}}=\frac{5}{8}$$

$$\omega_{A1}=\frac{8}{5}\omega_{B1} \geq \frac{8}{5}\sqrt{\frac{3(2-\sqrt{3})g}{4R}}$$ （3）（1 分）

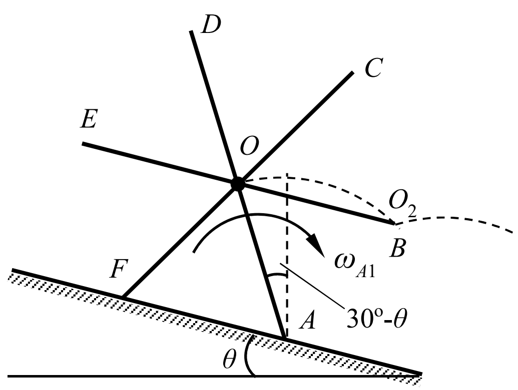
比较式（2）和（3），即得车轮由图中实线位置连续向前运动到虚线位置的 $\omega_{A1}$ 的最小值为

$$\omega_{A1\min}=\frac{8}{5}\sqrt{\frac{3(2-\sqrt{3})g}{4R}}=\frac{4}{5}\sqrt{\frac{3(2-\sqrt{3})g}{R}}$$ （1 分）




3)（本小题 5 分）

当 $\theta < 30^{\circ}$ 时，分析车轮轮心从图示位置到 $OA$ 运动到铅垂位置的过程，由动能定理得



$$\frac{1}{2}J_{Az}\omega_A^2-\frac{1}{2}J_{Az}\omega_{A1}^2=-6mg[R-R\cos(30^\circ-\theta)]$$

解得

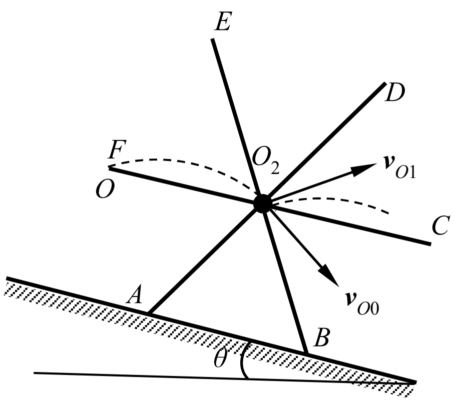
$$\omega_{A1}^2=\omega_A^2+\frac{3[1-\cos(30^\circ-\theta)]g}{2R}$$

为使车轮能沿斜面向下连续运动，要求 $\omega_A\geq 0$，得

$$\omega_{A1}^2\geq\frac{3[1-\cos(30^\circ-\theta)]g}{2R} \qquad （4）（2 分）$$

另一方面，车轮轮心由 $O$ 点到 $O_2$ 点的运动过程中，根据车轮的动能定理得

$$\frac{1}{2}J_{Az}\omega_{B0}^2-\frac{1}{2}J_{Az}\omega_{A1}^2=6mgR\sin\theta \qquad （5）$$




根据车轮对 $B$ 点碰撞的动量矩定理，得

$$6mv_{O0}\cdot R\sin 30^0+J_{Oz}\omega_{B0}-J_{Bz}\omega_{B1}=0 \qquad （6）$$

$$v_{O0}=\omega_{B0}R \qquad （7）$$

再注意到

$$\omega_{B1}=\omega_{A1} \qquad （8）$$

由式（5）-（8）解得

$$\omega_{A1}^2=\frac{25g}{26R}\sin\theta \tag{9}$$（9）（2 分）

将式（9）代入式（4），得

$$\frac{25g}{26R}\sin\theta\geq\frac{3[1-\cos(30^\circ-\theta)]g}{2R}$$

得到车轮沿斜面向下滚动，为使$\omega_{B1}=\omega_{A1}$，$\theta$应满足的关系式为

$$25\sin\theta-39[1-\cos(30^\circ-\theta)]\geq 0$$（1 分）

**第 3 题（15 分）**

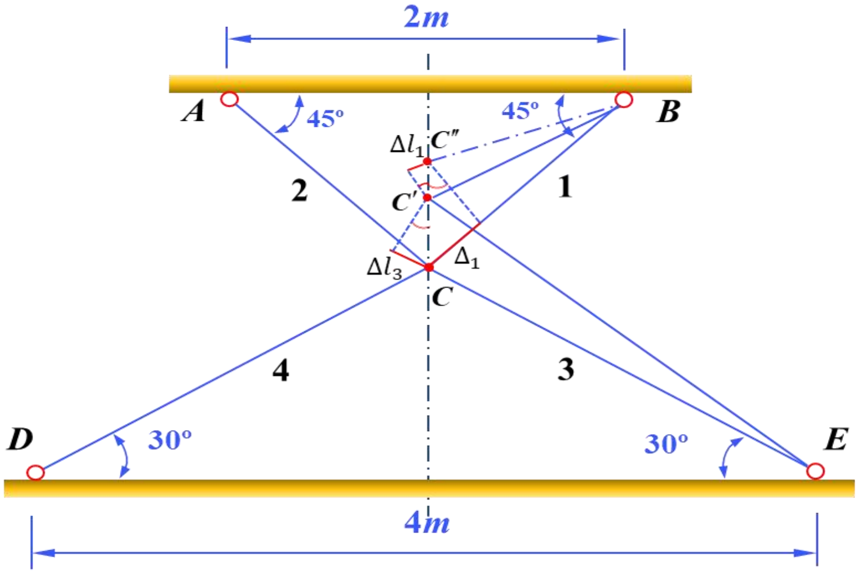



图 a

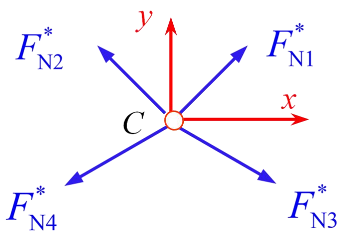



图 b

（1）　（本小题 7 分）

如图 a 所示，根据小变形条件和以切代弧的思想，由装配杆 *BC* 和杆 *AC* 的尺寸误差$\Delta_1$和$\Delta_2$所引起的 *C* 点垂直方向的总装配误差 $\delta = CC''$ 为

$$\Delta_1 = \Delta_2 \quad \delta = \frac{\Delta_1}{\sin 45^\circ} \qquad (1) \qquad （1 分）$$

1) 根据对称性，取结点 *C* 为研究对象，建立平衡方程（如图 b）如下

$$F^*_{N1} = F^*_{N2} \qquad F^*_{N3} = F^*_{N4}$$
$$\sum F_y = 0 \;\; 2F^*_{N1}\sin 45^\circ - 2F^*_{N3}\sin 30^\circ = 0 \qquad （1 分）$$

即: $\sqrt{2}F^*_{N1} = F^*_{N3}$ 　　（2）

2) 垂直方向的总装配误差$\delta$由两部分组成：一是杆 *BC*（杆 1）和杆 *AC*（杆 2）的伸长 $\Delta l_1 = \Delta l_2$ 所对应的部分 $\delta_1 = C'C''$，二是杆 *CE*（杆 3）和杆

$CD$（杆 4）的伸长 $\Delta l_3=\Delta l_4$ 所对应的部分 $\delta_2=CC'$ 。

由变形协调关系，得

$$\delta_1+\delta_2=\delta$$

$$\frac{\Delta l_1}{\sin 45^\circ}+\frac{\Delta l_3}{\sin 30^\circ}=\frac{\Delta_1}{\sin 45^\circ}$$ （2 分）

假设此时杆件均处于线弹性阶段，代入式（1）和物理方程，得

$$\frac{\sqrt{2}F_{\mathrm{N1}}^{*}l_1}{E_a A_1}+\frac{2F_{\mathrm{N3}}^{*}l_3}{E_a A_3}=\sqrt{2}\Delta_1 \qquad (3)$$ （1 分）

联立式（2）和式（3），得

$$F_{\mathrm{N1}}^{*}=F_{\mathrm{N2}}^{*}=\frac{\Delta_1}{\dfrac{2l_3}{E_a A_3}+\dfrac{l_1}{E_a A_1}}=\frac{E_a A_1\Delta_1}{2l_3\dfrac{A_1}{A_3}+l_1}=\frac{200\times10^{9}\times0.3\times10^{-3}}{2\times\dfrac{4\sqrt{3}}{3}\times\dfrac{1}{4}+\sqrt{2}}\times\frac{\pi}{4}\times20^{2}\times10^{-6}$$ （1 分）

$$=7.338\times10^{3}\,\mathrm{N}=7.338\mathrm{kN}（拉）$$

$$F_{\mathrm{N3}}^{*}=F_{\mathrm{N4}}^{*}=\sqrt{2}F_{\mathrm{N1}}^{*}=10.377\mathrm{kN}（拉）$$ （1 分）

3）当应力等于 100MPa 时，对应的各杆轴力为：

$$F_{\mathrm{N1}}^{\mathrm{a}}=F_{\mathrm{N2}}^{\mathrm{a}}=\sigma A=100\times10^{6}\times\frac{\pi\times20^{2}}{4}\times10^{-6}=31.416\mathrm{kN} \qquad (4)$$ （0.5 分）

$$F_{\mathrm{N3}}^{\mathrm{a}}=F_{\mathrm{N4}}^{\mathrm{a}}=\sigma A=100\times10^{6}\times\frac{\pi\times40^{2}}{4}\times10^{-6}=125.664\mathrm{kN} \qquad (5)$$ （0.5 分）

由于 $F_{\mathrm{N2}}=F_{\mathrm{N1}}<F_{\mathrm{N1}}^{\mathrm{a}}=F_{\mathrm{N2}}^{\mathrm{a}}$ 、 $F_{\mathrm{N3}}=F_{\mathrm{N4}}<F_{\mathrm{N3}}^{\mathrm{a}}=F_{\mathrm{N4}}^{\mathrm{a}}$ ，故受拉的杆 1 和杆 2 的应力均处于 $ab$ 线弹性阶段与假设一致。

（2）　（本小题 8 分）

当四根杆在点 $C$ 装配好之后，再施加向下的力 $F$，则杆 $BC$（杆 1）和杆 $AC$（杆 2）将会继续伸长，杆 $CE$（杆 3）和杆 $CD$（杆 4）则会受到压缩，根据变形协调关系（图 c），得

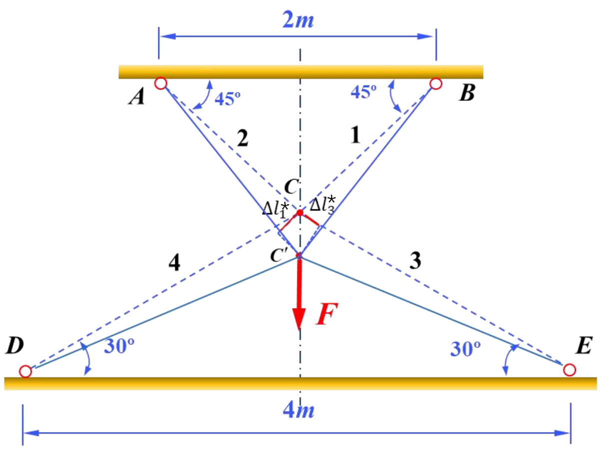



图 c

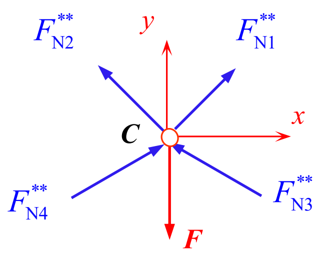



图 d

$$\frac{\Delta l_1^*}{\sin 45^\circ}=\frac{\Delta l_3^*}{\sin 30^\circ} \qquad (6)$$ （0.5 分）

1）施加力 $F$ 后，各杆增加的内力仍然满足平衡条件，由图 d 得

$$F_{N1}^{**}=F_{N2}^{**} \quad F_{N3}^{**}=F_{N4}^{**}$$

$$\sum F_y=0 \quad 2F_{N1}^{**}\sin 45^\circ+2F_{N3}^{**}\sin 30^\circ=F$$

即：$\sqrt{2}F_{N1}^{**}+F_{N3}^{**}=F$ （7） （0.5 分）

2）假设此时杆件仍处于 $Oa$ 线弹性阶段，代入式（6）和物理方程，得

$$\frac{\sqrt{2}F_{N1}^{**}l_1}{E_aA_1}=\frac{2F_{N3}^{**}l_3}{E_aA_3} \qquad (8)$$ （0.5 分）

联立式（7）和式（8），得

$$F_{N1}^{**}=\frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{l_1A_3}{2l_3A_1}+1\right)}F=\frac{90}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=28.605\text{kN}$$ （拉） （0.5 分）

$$F_{N3}^{**}=\frac{1}{\left(\frac{2l_3A_1}{l_1A_3}+1\right)}F=\frac{90\sqrt{3}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})}=49.546\text{kN}$$ （压） （0.5 分）

3）此时各杆的总轴力为:

$$F_{N2}=F_{N1}=F_{N1}^{*}+F_{N1}^{**}=35.943\text{kN}$$ （拉） （0.5 分）

$$F_{N4}=F_{N3}=F_{N3}^{**}-F_{N3}^{*}=39.169\text{kN}$$ （压） （0.5 分）

由式（4）和式（5）知，$F_{N2}=F_{N1}>F_{N1}^{a}=F_{N2}^{a}$ 故受拉的杆 1 和杆 2 的应力已经

超过 100MPa，处于 $ab$ 线弹性阶段，而 $F_{N4}=F_{N3}<F_{N3}^{a}=F_{N4}^{a}$ 受压的杆 3、杆 4 仍处于 $Oa$ 线弹性阶段。因此需要重新计算上部二拉杆的变形，建立新的变形协调方程。重复步骤（2）：

4）代入式（6）和物理方程，得

$$\frac{(31.416-7.338)\ l_1}{E_a A_1}\frac{1}{\sin 45^\circ}+\frac{\left[F_{N1}^{**}-(31.416-7.338)\right]l_1}{E_b A_1}\frac{1}{\sin 45^\circ}=\frac{F_{N3}^{**}l_3}{E_a A_3}\frac{1}{\sin 30^\circ}$$

$$4F_{N1}^{**}-24.078\times 3=\frac{F_{N3}^{**}}{\sqrt{3}} \qquad (9)$$ （0.5 分）

联立式（7）和式（9），得

$F_{N1}^{**}=25.787\text{kN}$（拉） （0.5 分）

$F_{N3}^{**}=53.532\text{kN}$（压） （0.5 分）

此时各杆的总轴力为：

$F_{N2}=F_{N1}=F_{N1}^{*}+F_{N1}^{**}=33.125\text{kN}$（拉） （0.5 分）

$F_{N4}=F_{N3}=F_{N3}^{**}-F_{N3}^{*}=43.155\text{kN}$（压） （0.5 分）

6）稳定性校核

杆 $CE$（杆 3）和杆 $CD$（杆 4）的临界力

$$F_{cr}=\frac{\pi^2 EI}{l^2}=46.509\text{kN}$$ （0.5 分）

由于 $F_{N3}=43.155\text{kN}\le F_{cr}=46.509\text{kN}$ （0.5 分）

满足稳定性要求。

**第四题（15 分）**

（1）（本小题 5 分）

圆轴受纯扭转，圆周表面 $A$ 点为纯剪切应力状态，线段 $AB$ 的变形如图 a 所示：

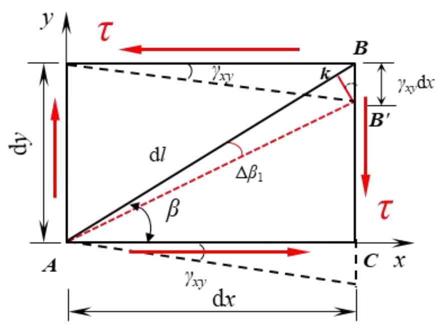



图 a

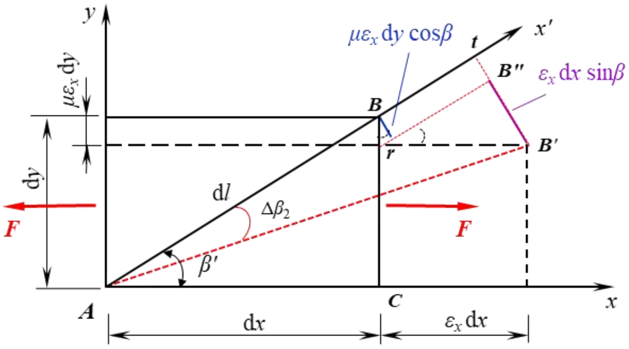



图 b

因此有

$$\Delta\beta_1=\frac{\gamma_{xy}dx\cdot\cos\beta}{dl-\gamma_{xy}dx\cdot\sin\beta}=\frac{\gamma_{xy}dx\cdot\cos\beta}{dl} \qquad \text{（2 分）}$$

根据 $dx=dl\cdot\cos\beta$， $dy=dl\cdot\sin\beta$， 则有

$$\Delta\beta_1=\frac{\gamma_{xy}dx\cdot\cos\beta}{dx/\cos\beta}=\gamma_{xy}\cos^2\beta=\frac{M_e}{GW_t}\cos^2\beta \qquad \text{（2 分）}$$

即

$$M_e=\frac{GW_t}{\cos^2\beta}\Delta\beta_1=\frac{E\pi D^3}{32(1+\mu)\cos^2\beta}\Delta\beta_1 \qquad \text{（1 分）}$$

（2）（本小题 5 分）

在 $F$ 作用下，圆轴为单向拉伸，圆周表面 $A$ 点为单向应力状态，线段 $AB$ 的变形如图 b 所示。在外力偶矩 $M_e$ 作用的同时又施加拉力 $F$ 时，线段 $AB$ 与 $AC$ 的夹角为

$$\beta'=\beta-\Delta\beta_1\approx\beta \qquad \text{（1 分）}$$

根据 $dx=dl\cdot\cos\beta$， $dy=dl\cdot\sin\beta$， 则有

$$\begin{aligned}\Delta\beta_2&=\frac{\varepsilon_x dx\cdot\sin\beta+\mu\varepsilon_x dy\cdot\cos\beta}{dl+\varepsilon_x dx\cdot\cos\beta-\mu\varepsilon_x dy\cdot\sin\beta}=\frac{\varepsilon_x dx\cdot\sin\beta+\mu\varepsilon_x dy\cdot\cos\beta}{dl}\\&=\varepsilon_x\cos\beta\sin\beta+\mu\varepsilon_x\sin\beta\cos\beta=\frac{(1+\mu)\varepsilon_x}{2}\sin 2\beta=\frac{(1+\mu)F}{2EA}\sin 2\beta\end{aligned} \qquad \text{（3 分）}$$

即

$$F=\frac{2EA}{(1+\mu)\sin 2\beta}\Delta\beta_2=\frac{E\pi D^2}{2(1+\mu)\sin 2\beta}\Delta\beta_2 \qquad \text{（1 分）}$$

（3）（本小题 5 分）

当外力偶矩 $M_e$ 和轴向拉力 $F$ 同时作用时，线段 $AB$ 的偏转角为

$$\begin{aligned}\Delta\beta &= \Delta\beta_1 + \Delta\beta_2 = \gamma_{xy}\cos^2\beta + \frac{(1+\mu)\varepsilon_x}{2}\sin 2\beta \\ &= \frac{32(1+\mu)M_e}{E\pi D^3}\cos^2\beta + \frac{2(1+\mu)F}{E\pi D^2}\sin 2\beta\end{aligned} \qquad \text{（2 分）}$$

求极值

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta\beta}{d\beta} &= (1+\mu)\varepsilon_x\cos 2\beta - 2\gamma_{xy}\cos\beta\sin\beta \\ &= \frac{4(1+\mu)F}{E\pi D^2}\cos 2\beta - \frac{32(1+\mu)M_e}{E\pi D^3}2\cos\beta\sin\beta = 0\end{aligned} \qquad \text{（1 分）}$$

$$(1+\mu)\varepsilon_x\cos 2\beta - \gamma_{xy}\sin 2\beta = \frac{4(1+\mu)F}{E\pi D^2}\cos 2\beta - \frac{32(1+\mu)M_e}{E\pi D^3}\sin 2\beta = 0$$

$$\tan 2\beta = \frac{(1+\mu)\varepsilon_x}{\gamma_{xy}} = \frac{FD}{8M_e} = 1$$

$$2\beta = 45° \text{ 或 } 225°，\quad \text{舍去} \quad 2\beta = 225°，\quad \text{得} \quad \beta = 22.5° \qquad \text{（1 分）}$$

由于

$$\frac{d^2\Delta\beta}{d\beta^2} = -2(1+\mu)\varepsilon_x\sin 2\beta - 2\gamma_{xy}\cos 2\beta = -\frac{2\gamma_{xy}}{\cos 2\beta} = -\frac{64(1+\mu)M_e}{E\pi D^3\cos 2\beta}$$

当 $2\beta = 45°$ 时

$$\frac{d^2\Delta\beta}{d\beta^2} = -\frac{64(1+\mu)M_e}{E\pi D^3\cos 2\beta} = -\frac{32\sqrt{2}(1+\mu)M_e}{E\pi D^3} < 0 \quad \text{为极大值} \qquad \text{（1 分）}$$

同理，当 $2\beta = 225°$ 时，$\dfrac{d^2\Delta\beta}{d\beta^2} > 0$ 为极小值。

故得，在 $M_e$ 和 $F$ 的作用下，圆轴产生拉扭组合变形，当线段 $AB$ 与水平线 $AC$ 的夹角 $\beta = 22.5°$ 时，线段 $AB$ 的偏转角变化达最大，测试灵敏度最高。

# 第二部分 提高题部分详细解答及评分标准(共 60 分)

## 第 5 题（15 分）

(1)（本小题 5 分）

当$\theta$=0°或$\theta$=180°时（图 a），解不唯一。因为这是一个奇异位置。（2 分）

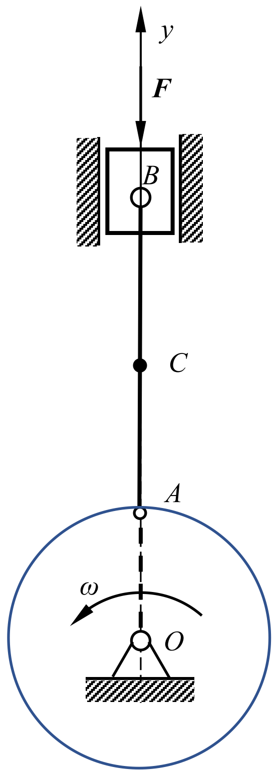



图 a

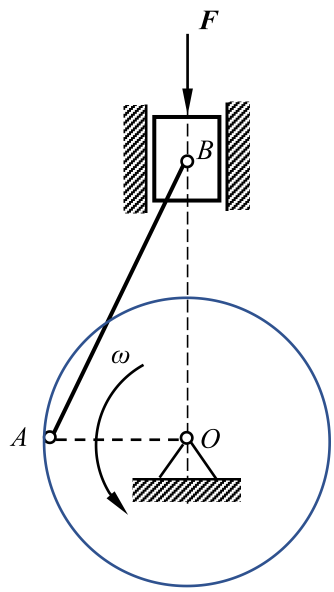



图 b

当$\theta$=90°时，机构运动到图示位置 $b$。

1）此时连杆 $AB$ 做瞬时平移，$\omega_{AB}=0$。

由 $\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{BA}^t+\boldsymbol{a}_{BA}^n$， 得

$$\alpha_{AB}=(a_A/\cos 30^\circ)/2=5773.5\text{rad/s}^2$$ （逆时针）

$$a_B=a_A\tan 30^\circ=5773.5\text{m/s}^2$$ （↑）

由 $\boldsymbol{a}_C=\boldsymbol{a}_A+\boldsymbol{a}_{CA}^t+\boldsymbol{a}_{CA}^n$ 得

$$a_{Cx}=a_A-\alpha_{AB}\cdot 1\cdot\cos 30^\circ=5000\text{m/s}^2$$ （→）

$$a_{Cy}=\alpha_{AB}\cdot 1\cdot\sin 30^\circ=2886.75\text{m/s}^2$$ （↑）（1 分）

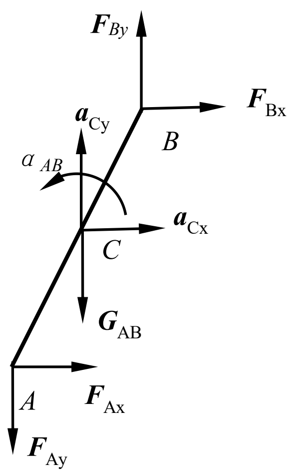



图 c

2）取圆盘 $O$ 为研究对象，由刚体定轴转动微分方程，解得：$F_{Ay}$=0

3）再取连杆 $AB$ 为研究对象，如图 $c$ 所示，应用刚体平面运动微分方程有

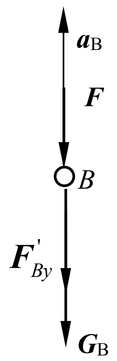


图 d

$$m_{AB}a_{Cx}=F_{Ax}+F_{Bx}$$

$$m_{AB}a_{Cy}=F_{By}-m_{AB}g$$

$$J_{Cz}\alpha_{AB}=(F_{Ax}-F_{Bx})\cdot 1\cdot\cos 30^{\circ}+F_{By}\cdot 1\cdot\sin 30^{\circ}$$

解得：$F_{Ax}$=555kN（→），$F_{Bx}$=445kN（→），

$F_{By}$=579.31kN（↑） （1 分）

4）最后取滑块 $B$ 为研究对象，如图 $d$ 所示，应用刚体质心运动定理有

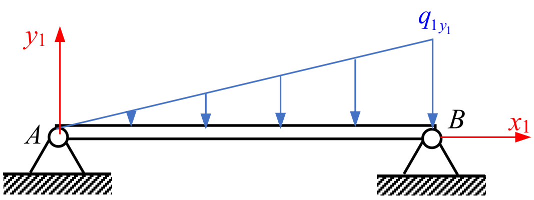
$$-m_B a_B=F+F'_{By}+m_B g$$

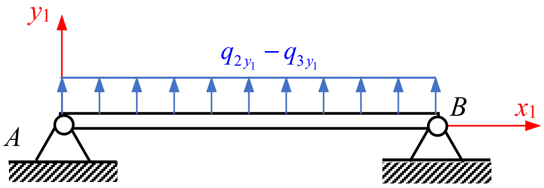
解得：$F$=−1735.96kN（↑） （1 分）

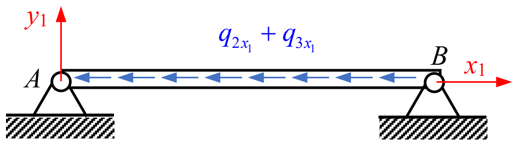
（2）（本小题 10 分）

当$\theta$=90°时，校核连杆 $AB$ 的强度

**1**）将连杆顺时针转至水平位置，分布载荷的集度分别为（2.5 分）




$$q_{1y_1}=\frac{m_{AB}}{2rA}Ar\alpha=\alpha m_{AB}=1155\times10^{3}\,\text{N/m}=1155\text{kN/m}$$ （↓） （0.5 分）

$$q_{2y_1}=\frac{m_{AB}}{2rA}Ar\omega^{2}\cos 30^{\circ}=\frac{\sqrt{3}}{4}m_{AB}\omega^{2}=866\times10^{3}\,\text{N/m}=866\text{kN/m}$$ （↑） （0.5 分）

$$q_{3y_1}=\frac{m_{AB}}{2rA}Ag\sin 30°=\frac{M_2}{2r}g\frac{1}{2}=490\text{N/m}=0.49\text{kN/m}\ (\downarrow)$$ （0.5 分）

则 $q_{2y_1}-q_{3y_1}=865.5\text{kN/m}$ （↓）

$$q_{2x_1}=\frac{m_{AB}}{2rA}Ar\omega^2\sin 30°=\frac{1}{4}m_{AB}\omega^2=500\times10^3\text{N/m}=500\text{kN/m}\ (\leftarrow)$$ （0.5 分）

$$q_{3x_1}=\frac{m_{AB}}{2rA}Ag\cos 30°=\frac{m_{AB}}{2r}g\frac{\sqrt{3}}{2}=849\text{N/m}=0.849\text{kN/m}\ (\leftarrow)$$ （0.5 分）

则 $q_{2x_1}+q_{3x_1}=500.8\text{kN/m}$ （←）

2）求连杆 *AB* 上任意横截面上的内力函数（2 分）

$$\begin{aligned}M(x_1)&=-\frac{1}{2}q_{1y_1}\frac{x_1}{2r}x_1\frac{x_1}{3}+\frac{1}{2}q_{2y_1}x_1^2-\frac{1}{2}q_{3y_1}x_1^2-F_{Ax}x_1\cos 30^c\\&=-\frac{q_{1y_1}}{12r}x_1^{\ 3}+\frac{q_{2y_1}-q_{3y_1}}{2}x_1^{\ 2}-\frac{\sqrt{3}}{2}F_{Ax}x_1\end{aligned}$$ （1 分）

$$F_N(x_1)=(q_{2x_1}+q_{3x_1})x_1-F_{Ax}\sin 30°=500.8x_1-277.5$$ （1 分）

3）连杆 *AB* 的危险截面、危险点的应力及强度校核（3 分）

**解法 A:**

由于连杆 *AB* 的危险截面是拉弯组合，危险点（在连杆 *AB* 的上表面）的应力由弯曲拉应力与轴力引起的拉应力叠加，即

$$\sigma(x_1)=-\frac{M}{W}+\frac{F_N}{A}=\frac{1}{W}\left(\frac{q_{1y_1}}{12r}x_1^{\ 3}-\frac{q_{2y_1}-q_{3y_1}}{2}x_1^{\ 2}+\frac{\sqrt{3}}{2}F_{Ax}x_1\right)+\frac{1}{A}\left[(q_{2x_1}+q_{3x_1})x_1-F_{Ax}\sin 30°\right]$$

（1 分）

危险截面的位置在：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(x_1)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{W}\left[\frac{q_{1y_1}}{4r}x_1^{\ 2}-(q_{2y_1}-q_{3y_1})x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}F_{Ax}\right]+\frac{1}{A}(q_{2x_1}+q_{3x_1})=0$$

$$x_1^{\ 2}-3x_1+1.8=0 \quad 取 \quad x_1=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{9-4\times1.8}\right)=0.83\text{m}$$ （1 分）

强度校核：

$$\sigma(x_1)_{\max}=166.6\text{MPa}\le[\sigma]=180\text{MPa}$$ （1 分）

**解法 B:**

由于判断危险截面及危险点的位置比较困难，故针对两种可能性进行分析：

a）连杆 $AB$ 危险点的应力可能为最大弯曲压应力与轴力引起的正应力叠加，即

$$\sigma(x_1)=\frac{M}{W}+\frac{F_N}{A}=\frac{1}{W}(-\frac{q_{1y_1}}{12r}x_1{}^3+\frac{q_{2y_1}-q_{3y_1}}{2}x_1{}^2-\frac{\sqrt{3}}{2}F_{Ax}x_1)+\frac{1}{A}\left[(q_{2x_1}+q_{3x_1})x_1-F_{Ax}\sin 30°\right]$$

（0.5 分）

危险截面的位置在：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(x_1)}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{W}\left[\frac{q_{1y_1}}{4r}x_1{}^2-(q_{2y_1}-q_{3y_1})x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}F_{Ax}\right]+\frac{1}{A}(q_{2x_1}+q_{3x_1})=0$$

$$288.8x_1{}^2-865.5x_1+441.5=0$$

$$x_1{}^2-3x_1+1.53=0 \quad 取 \quad x_1=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{9-4\times1.53}\right)=0.65\mathrm{m}$$ （0.5 分）

强度校核：

$$\left|\sigma(x_1)\right|_{\max}=\left|-152.3\right|\mathrm{MPa}\le[\sigma]=180\mathrm{MPa}$$ （0.5 分）

b）连杆 $AB$ 危险点的应力也可能为最大弯曲拉应力与轴力引起的正应力叠加，即

$$\sigma(x_1)=-\frac{M}{W}+\frac{F_N}{A}$$
$$=\frac{1}{W}(\frac{q_{1y_1}}{12r}x_1{}^3-\frac{q_{2y_1}-q_{3y_1}}{2}x_1{}^2+\frac{\sqrt{3}}{2}F_{Ax}x_1)+\frac{1}{A}\left[(q_{2x_1}+q_{3x_1})x_1-F_{Ax}\sin 30°\right]$$ （0.5 分）

最大组合应力发生的位置在：

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(x_1)}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{W}\left[\frac{q_{1y_1}}{4r}x_1{}^2-(q_{2y_1}-q_{3y_1})x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}F_{Ax}\right]+\frac{1}{A}(q_{2x_1}+q_{3x_1})=0$$

$$x_1{}^2-3x_1+1.8=0 \quad 取 \quad x_1=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{9-4\times1.8}\right)=0.83\mathrm{m}$$ （0.5 分）

强度校核：

$$\sigma(x_1)_{\max}=166.6\mathrm{MPa}\le[\sigma]=180\mathrm{MPa}$$ （0.5 分）

4）画出弯矩图的大致形状（2.5 分）

求弯矩一阶导数并令其等于零：

$$\frac{\mathrm{d}M(x_1)}{\mathrm{d}x_1}=-\frac{q_{1y_1}}{4r}x_1^{\ 2}+(q_{2y_1}-q_{3y_1})x_1-\frac{\sqrt{3}}{2}F_{Ax}=0$$

$$-288.8x_1^{\ 2}+865.5x_1-480.6=0$$

$$x_1^{\ 2}-3x_1+1.66=0 \quad 取 \quad x_1=\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{9-4\times1.66}\right)=0.735\mathrm{m}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2M(x_1)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_1=0.735\mathrm{m}}=-577.6x_1+865.5=-577.6\times0.735+865.5=441>0$$

弯矩 $M$ 在 $x_1=0.735\mathrm{m}$ 处达最小值。（0.5 分）

$$M_{\max}=-\frac{1155}{12}\times0.735^3+\frac{865.5}{2}\times0.735^2-480.6\times0.735=-157.7\mathrm{kN\cdot m} \quad （0.5 分）$$

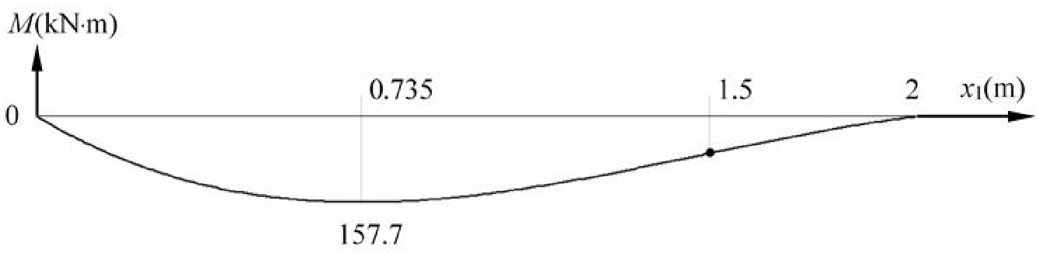
求弯矩二阶导数并令其等于零：

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2M(x_1)}{\mathrm{d}x_1^2}\right|=-577.6x_1+865.5=0$$

解得 $x_1=1.5\mathrm{m}$

即，当 $x_1$=1.5m 时，弯矩图产生了拐点。（0.5 分）

弯矩图如下所示：其中，$x_1=0.735\mathrm{m}$ 时，$M_{\max}=-157.7\mathrm{kN\cdot m}$；$x_1=1.5\mathrm{m}$ 时，产生拐点。（1 分）



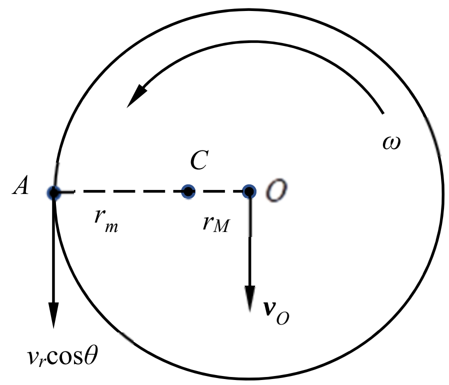
**第 6 题 (25 分)**

**解法 1:**

1）（本小题 3 分）

整个系统在水平面内质心运动守恒。（1 分）

系统在任意时刻的俯视图如下。




$$r_M = \frac{m}{M+m}R = \frac{1}{3}R,\qquad r_m = \frac{M}{M+m}R = \frac{2}{3}R$$

由于 $r_M = \text{const}$，且圆筒的质心 $O$ 的高度不变，故圆筒的质心相对地面运动的轨迹为：以过系统质心 $C$ 的铅垂线与距离地面 $\frac{1}{2}h$ 的水平面的交点为圆心、$\frac{1}{3}R$ 为半径的水平面内的圆周。（2 分）

*（说明：此处如果描述为“以系统质心 C 为圆心、$\frac{1}{3}R$ 为半径的圆周”不扣分）*

2)（本小题 6 分）

圆筒做平面运动，假设圆筒的角速度为 $\omega$，质心的速度为 $\boldsymbol{v}_O$。以小球为动点，圆筒为动系，小球相对圆筒的速度为 $\boldsymbol{v}_r$。则小球的绝对速度

$$\boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{v}_e + \boldsymbol{v}_r = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{AO} + \boldsymbol{v}_r$$

$$v_{at} = v_O + \omega R + v_r\cos\theta \qquad (1)$$

$$v_{az} = v_r\sin\theta \qquad (2)（2 分）$$

整个系统在水平面内动量守恒，有

$$m(v_O+\omega R+v_r\cos\theta)+2mv_O=0 \tag{3}$$

整个系统在水平面内对质心 $C$ 的动量矩守恒，有

$$m(v_O+\omega R+v_r\cos\theta)r_m-2mv_Or_M+2mR^2\omega=0 \tag{4}$$

由式（3）和（4）解得

$$v_O=-\frac{1}{4}v_r\cos\theta \tag{5}$$

$$\omega R=-\frac{1}{4}v_r\cos\theta \tag{6}$$

将上两式代入式（1）得

$$v_{at}=\frac{1}{2}v_r\cos\theta$$ （7）（2 分）

**解法 A：** 由于

$$\frac{v_{az}}{v_{at}}=\frac{v_r\sin\theta}{v_O+\omega R+v_r\cos\theta}=\frac{2\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\text{const.}$$

因此小球相对地面的轨迹为螺旋线，其升角为 $\varphi=\tan^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}}$，则小球运动至圆筒底部时相对地面通过的路程为

$$s=\frac{h}{\sin\varphi}=h\sqrt{1+\frac{1}{(\tan\varphi)^2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}h$$ （2 分）

**解法 B：** $v_a=\sqrt{v_{az}^2+v_{at}^2}=v_r\sqrt{\sin^2\theta+\frac{1}{4}\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{7}}{4}v_r$

小球运动至圆筒底部时相对地面通过的路程为

$$s=\int v_a\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{7}}{4}\int v_r\mathrm{d}t$$

注意到 $\int v_r\mathrm{d}t$ 为小球相对于圆筒通过的路程，故小球运动至圆筒底部时

$$\int v_r\mathrm{d}t=\frac{h}{\sin\theta}=2h$$

所以

$$s=\frac{\sqrt{7}}{4}\cdot 2h=\frac{\sqrt{7}}{2}h$$ （2 分）

3）（本小题 6 分）

当小球下降高度 $z_A$ 时，对整个系统应用动能定理得

$$mgz_A=\frac{1}{2}2mR^2\omega^2+\frac{1}{2}2mv_O^2+\frac{1}{2}m(v_{at}^2+v_{az}^2) \tag{8}$$

代入式（2）、（5）、（6）和（7）解得

$$v_r=4\sqrt{\frac{gz_A}{5}} \tag{9}$$

将上式代入式（2），得到小球在铅垂方向的速度

$$v_{az}=v_r\sin\theta=2\sqrt{\frac{gz_A}{5}} \qquad （10）（3 分）$$

上式对时间求导，得小球在铅垂方向的加速度

$$a_{az}=\frac{\mathrm{d}v_{az}}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{g}{5z_A}}\cdot\frac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}=\sqrt{\frac{g}{5z}}\cdot v_{az}=\frac{2}{5}g \qquad （11）（1 分）$$

再由整个系统达朗贝尔原理在铅垂方向的投影，有

$$F_N-mg-2mg+ma_{az}+2m\cdot 0=0$$

$$F_N=\frac{13}{5}mg \qquad （2 分）$$

*（说明：求出 $a_{az}$ 后也可以应用质心运动定理在铅垂方向的投影求 $F_N$）*

4）（本小题 10 分）

当小球下降高度 $z$ 时，将式（9）代入式（5）、（6）得到圆筒质心 $O$ 的速度和圆筒的角速度为

$$v_O=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3gz_A}{5}} \tag{12}$$

$$\omega=-\frac{1}{2R}\sqrt{\frac{3gz_A}{5}} \tag{13}$$

由于圆筒质心 $O$ 以 $C$ 为圆心、$r_M$ 为半径相对地面做圆周运动，由上面两式并注意到式（10）得

$$a_O^t=\frac{\mathrm{d}v_O}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3g}{5z_A}}\cdot\frac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{4}\sqrt{\frac{3g}{5z_A}}\cdot v_{az}=-\frac{\sqrt{3}}{10}g \tag{14}$$

$$a_O^n = \frac{v_O^2}{r_M} = \frac{9z_A}{20R}g \tag{15}$$

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sqrt{3}}{10R}g$$ （16）（3 分）

将式（9）代入式（7）得

$$v_{at} = \sqrt{\frac{3gz_A}{5}} \tag{17}$$

将上式对时间求导，并注意到式（10）得小球的在水平面内的加速度为

$$a_a^t = \frac{\mathrm{d}v_{at}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{5z_A}} \cdot \frac{\mathrm{d}z_A}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3g}{5z_A}} \cdot v_{az} = \frac{\sqrt{3}}{5}g \tag{18}$$

$$a_a^n = \frac{v_{at}^2}{r_m} = \frac{9z_A}{10R}g$$ （19）（2 分）

对圆筒和小球分别虚加惯性力和惯性力矩，对整个系统应用达朗贝尔原理

$$F_{\mathrm{I}Ax} = ma_a^t = \frac{\sqrt{3}}{5}mg$$

$$F_{\mathrm{I}Ay} = ma_a^n = \frac{9z_A}{10R}mg$$

$$F_{\mathrm{I}Az} = ma_{az} = \frac{2}{5}mg$$

$$F_{\mathrm{I}Ox} = 2ma_O^t = \frac{\sqrt{3}}{5}mg$$

$$F_{\mathrm{I}Oy} = 2ma_O^n = \frac{9z_A}{10R}mg$$

$$M_{\mathrm{I}Oz} = 2mR^2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}mgR$$ （2 分）

$$\sum M_x = 0 \qquad mgR - F_{\mathrm{I}Az}R - F_{\mathrm{I}Ay}z_A + F_{\mathrm{I}Oy}\cdot\frac{h}{2} - F_N y = 0$$

$$\sum M_y = 0 \qquad -F_{\mathrm{I}Ax}z_A + F_{\mathrm{I}Ox}\cdot\frac{h}{2} + F_N x = 0$$

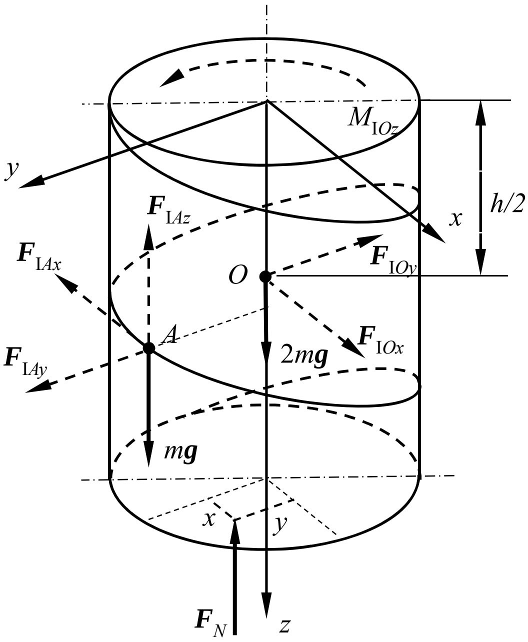
由以上两式解得

$$y = \frac{3}{13}[R + \frac{3z_A}{2R}(\frac{h}{2} - z_A)]$$

$$x = -\frac{\sqrt{3}}{13}(\frac{h}{2} - z_A)$$

小球下降过程中水平面对圆筒的铅垂力合力作用线与圆筒轴线间的距离

$$d=\frac{1}{13}\sqrt{9[R+\frac{3z}{2R}(\frac{h}{2}-z_A)]^2+3(\frac{h}{2}-z_A)^2}$$ （3 分）

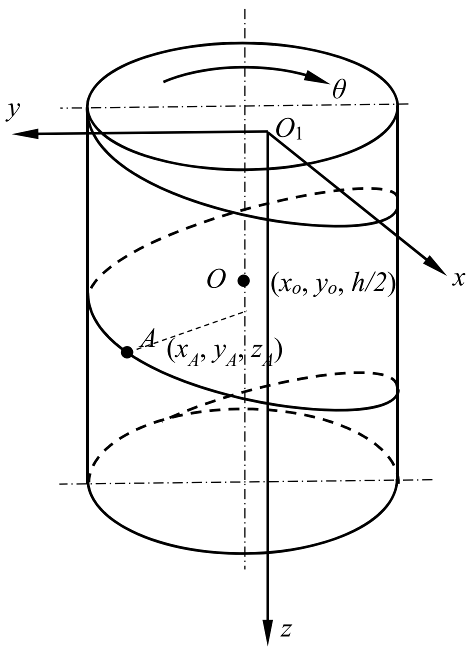


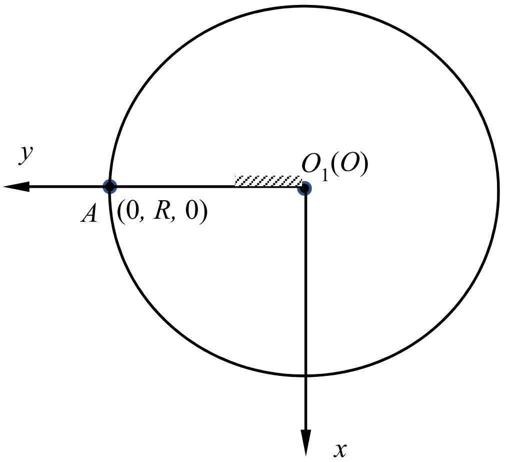

*（说明：这里也可以先求出圆筒质心的加速度和圆筒的角加速度，得 3 分，然后应用达朗贝尔原理求出小球的惯性力，得 4 分，再求水平面对圆筒的铅垂力合力作用线与圆筒轴线间的距离，得 3 分）*

**解法 2：**

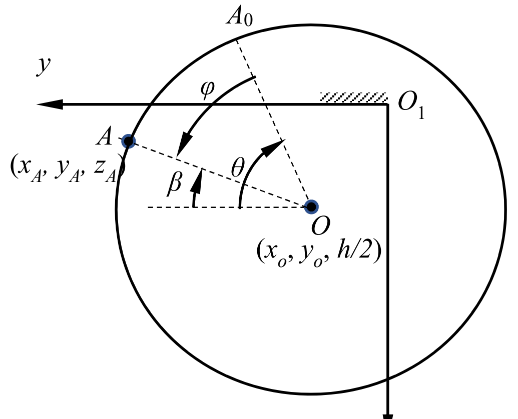
应用拉格朗日第二类方程求解。系统有 4 个自由度。（1 分）

建立如图所示的固定直角坐标系 $O_1xyz$，其中原点 $O_1$ 为初始时刻圆筒顶面的圆心，$O_1y$ 轴通过小球 $A$ 的初始位置，$O_1z$ 轴沿初始时刻圆筒的轴线向下，坐标系 $O_1xyz$ 为右手系。选择广义坐标：$x_O, y_O, \theta, z_A$。其中 $x_O, y_O$ 是圆筒质心 $O$ 的 $x$ 坐标和 $y$ 坐标，$\theta$ 是圆筒的转角，$z_A$ 是小球的 $z$ 坐标。




初始时刻




一般位置

初始时刻： $t=0$， $x_O(0)=0, y_O(0)=0, z_A(0)=0, \theta(0)=0$

$$\dot{x}_O(0)=0, \dot{y}_O(0)=0, \dot{z}_A(0)=0, \dot{\theta}(0)=0$$

圆筒螺旋线的螺距 $l = 2\pi R \cdot \tan\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi R$，故小球相对于圆筒的转角

$\varphi = 2\pi \cdot \dfrac{z_A}{l} = \sqrt{3}\dfrac{z_A}{R}$，小球相对于固定坐标系 $O_1xyz$ 的转角 $\beta = \theta - \varphi = \theta - \sqrt{3}\dfrac{z_A}{R}$，则在固定坐标系 $O_1xyz$ 中，小球的坐标为

$$\begin{cases} x_A = x_O - R\sin\beta = x_O - R\sin(\theta - \sqrt{3}\dfrac{z_A}{R}) \\ y_A = y_O + R\cos\beta = y_O + R\cos(\theta - \sqrt{3}\dfrac{z_A}{R}) \\ z_A = z_A \end{cases} \tag{1}$$

小球的动能为

$$\begin{aligned} T_A &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_A^2 + \dot{y}_A^2 + \dot{z}_A^2) \\ &= \frac{1}{2}m\left\{[\dot{x}_O - R(\dot{\theta} - \frac{\sqrt{3}}{R}\dot{z}_A)\cos(\theta - \sqrt{3}\frac{z_A}{R})]^2 + [\dot{y}_O - R(\dot{\theta} - \frac{\sqrt{3}}{R}\dot{z}_A)\sin(\theta - \sqrt{3}\frac{z_A}{R})]^2 + \dot{z}_A^2\right\} \end{aligned}$$

（2 分）

圆筒的动能为

$$T_O = \frac{1}{2}2m(\dot{x}_O^2 + \dot{y}_O^2) + \frac{1}{2}2mR^2\dot{\theta}^2 = m(\dot{x}_O^2 + \dot{y}_O^2) + mR^2\dot{\theta}^2$$ （2 分）

小球的势能

$$V_A = -mgz_A$$ （2 分）

系统的拉格朗日函数为

$$L = T_A + T_O - V_A$$

根据第二类拉格朗日方程，由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_O}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial x_O} = 0$，得

$$3\ddot{x}_O - (R\ddot{\theta} - \sqrt{3}\ddot{z}_A)\cos(\theta - \sqrt{3}\frac{z_A}{R}) + R(\dot{\theta} - \sqrt{3}\frac{\dot{z}_A}{R})^2\sin(\theta - \sqrt{3}\frac{z_A}{R}) = 0$$

（2）（2 分）

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_O}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial y_O} = 0$，得

$$3\ddot{y}_O - (R\ddot{\theta} - \sqrt{3}\ddot{z}_A)\sin(\theta - \sqrt{3}\frac{z_A}{R}) - R(\dot{\theta} - \sqrt{3}\frac{\dot{z}_A}{R})^2\cos(\theta - \sqrt{3}\frac{z_A}{R}) = 0$$

（3）（2 分）

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial \theta}=0$，得

$$3R\ddot{\theta}-\sqrt{3}\ddot{z}_A-\ddot{x}_O\cos(\theta-\sqrt{3}\frac{z_A}{R})-\ddot{y}_O\sin(\theta-\sqrt{3}\frac{z_A}{R})=0$$

（4）（2 分）

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{z}_A}\right)-\dfrac{\partial L}{\partial z_A}=0$，得

$$-\sqrt{3}R\ddot{\theta}+4\ddot{z}_A+\sqrt{3}\ddot{x}_O\cos(\theta-\sqrt{3}\frac{z_A}{R})+\sqrt{3}\ddot{y}_O\sin(\theta-\sqrt{3}\frac{z_A}{R})-g=0$$

（5）（2 分）

***（说明：应用拉格朗日第二类方程得到系统的动力学微分方程共得 15 分。如果采用 4 个独立坐标，写出动量守恒 2 个方程、动量矩守恒 1 个方程、机械能守恒 1 个方程，同样给 15 分）***

1）求圆筒的质心相对地面的运动轨迹

联立（2）、（3）、（4）、（5），解得

$$\ddot{x}_O=\frac{1}{30}[-3\sqrt{3}g\cos(\theta-\sqrt{3}\frac{z_A}{R})-10R(\dot{\theta}-\sqrt{3}\frac{\dot{z}_A}{R})^2\sin(\theta-\sqrt{3}\frac{z_A}{R})] \qquad (6)$$

$$\ddot{y}_O=\frac{1}{30}[-3\sqrt{3}g\sin(\theta-\sqrt{3}\frac{z_A}{R})+10R(\dot{\theta}-\sqrt{3}\frac{\dot{z}_A}{R})^2\cos(\theta-\sqrt{3}\frac{z_A}{R})] \qquad (7)$$

$$\ddot{\theta}=\frac{\sqrt{3}}{10}\frac{g}{R} \qquad (8)$$

$$\ddot{z}_A=\frac{2}{5}g \qquad (9)$$

积分式（8），并代入初始条件得

$$\dot{\theta}=\frac{\sqrt{3}}{10}\frac{g}{R}t \quad , \quad \theta=\frac{\sqrt{3}}{20}\frac{g}{R}t^2 \qquad (10)$$

积分式（9），并代入初始条件得

$$\dot{z}_A=\frac{2}{5}gt \quad , \quad z_A=\frac{1}{5}gt^2 \qquad (11)$$

将式（10）、（11）代入式（6）、（7）得

$$\ddot{x}_O=\frac{1}{10R}\left(\frac{9g^2t^2}{10}\sin\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}-\sqrt{3}Rg\cos\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}\right) \tag{12}$$

$$\ddot{y}_O=\frac{1}{10R}\left(\frac{9g^2t^2}{10}\cos\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}+\sqrt{3}Rg\sin\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}\right) \tag{13}$$

积分式（12)、(13)，并代入初始条件得

$$x_O=-\frac{R}{3}\sin\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R} \tag{14}$$

$$y_O=-\frac{R}{3}\cos\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}+\frac{R}{3} \tag{15}$$

由式（14)、(15）消去 $t$ 得圆筒质心 $O$ 的轨迹方程为

$$x_O^2+(y_O-\frac{R}{3})^2=(\frac{R}{3})^2 \qquad (16)(2\text{ 分})$$

圆筒质心 $O$ 的 $z$ 坐标为 $z_O=\frac{1}{2}h$。

***（说明：应用拉格朗日第二类方程得到系统的动力学微分方程后，根据广义动量积分和广义能量积分将动力学微分方程降阶，或者直接根据动量守恒、动量矩守恒、机械能守恒的 4 个方程，积分求得 $x_O$、$y_O$，从而得到圆筒质心 O 的轨迹方程，同样给 2 分）***

2）求在地面上观察到的小球运动轨迹的总长度 $s$

将式（10)、(11)、(14)、(15）代入式（1）得小球的运动方程为

$$x_A=\frac{2R}{3}\sin\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R} \tag{17}$$

$$y_A=\frac{2R}{3}\cos\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}+\frac{R}{3} \tag{18}$$

$$z_A=\frac{1}{5}gt^2 \tag{19}$$

由式（19）得小球运动至圆筒底部所经历的时间为

$$t_1=\sqrt{\frac{5h}{g}} \tag{20}$$

小球运动至圆筒底部时，所经历的路程

$$s=\int_0^{t_1}\sqrt{\dot{x}_A^2+\dot{y}_A^2+\dot{z}_A^2}\mathrm{d}t=\int_0^{t_1}\frac{\sqrt{7}gt}{5}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{7}}{2}h \qquad (21)(2分)$$

3）求小球下降过程中 $\boldsymbol{F}_N$ 的大小

以整个系统为研究对象，应用质心运动定理在铅垂方向的投影，并注意到式（9），得

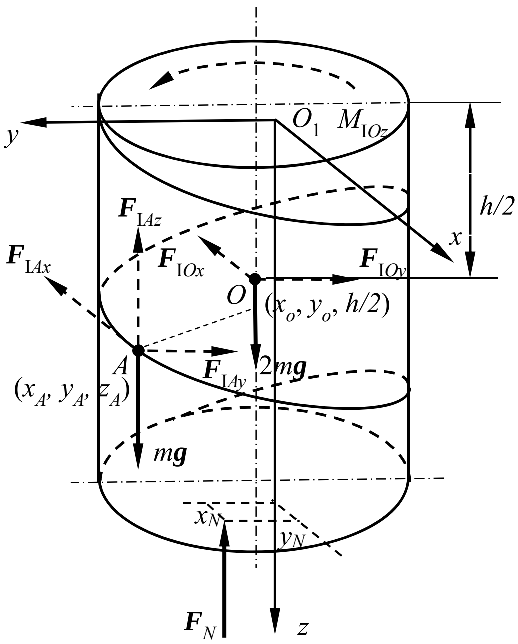
$$m\ddot{z}_A+2m\cdot 0=-F_N+mg+2mg$$

$$F_N=\frac{13}{5}mg \qquad (22)(2分)$$

*（说明：这里也可以应用达朗贝尔原理在铅垂方向的投影求 $F_N$）*

4）求小球下降过程中 $\boldsymbol{F}_N$ 的作用线与圆筒轴线间的距离 $d$

对整个系统应用达朗贝尔原理，对圆筒和小球分别虚加惯性力和惯性力矩如下图。




$$F_{\mathrm{I}Ax}=m\ddot{x}_A=\frac{m}{5R}\left(\sqrt{3}Rg\cos\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}-\frac{9g^2t^2}{10}\sin\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}\right)$$

$$F_{\mathrm{I}Ay}=m\ddot{y}_A=-\frac{m}{5R}\left(\frac{9g^2t^2}{10}\cos\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}+\sqrt{3}Rg\sin\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}\right)$$

$$F_{\mathrm{I}Az}=m\ddot{z}_A=\frac{2}{5}mg$$

$$F_{\mathrm{I}Ox}=2m\ddot{x}_O=\frac{m}{5R}\left(\frac{9g^2t^2}{10}\sin\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}-\sqrt{3}Rg\cos\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}\right)$$

$$F_{\mathrm{I}Oy}=2m\ddot{y}_O=\frac{m}{5R}\left(\frac{9g^2t^2}{10}\cos\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}+\sqrt{3}Rg\sin\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}\right)$$

$$M_{\mathrm{I}Oz}=2mR^2\ddot{\theta}=\frac{\sqrt{3}}{5}mgR$$

$$\sum M_x=0\quad mgy_A+2mgy_O-F_{\mathrm{I}Az}y_A+F_{\mathrm{I}Ay}z_A+F_{\mathrm{I}Oy}\cdot\frac{h}{2}-F_Ny_N=0 \tag{23}$$

$$\sum M_y=0\quad -F_{\mathrm{I}Ax}z_A+F_{\mathrm{I}Az}x_A-mgx_A-2mgx_O-F_{\mathrm{I}Ox}\cdot\frac{h}{2}+F_Nx_N=0 \tag{24}$$

（2 分）

由式（23）和（24），并注意到式（14）-（15）、（17）-（19）、（22），解得

$$\begin{aligned}x_N&=\frac{1}{3900R}\left(\left(-54g^2t^4+135ght^2-400R^2\right)\sin\left(\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}\right)+60\sqrt{3}R\left(t^2g-\frac{5h}{2}\right)\cos\left(\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}\right)\right)\\&=\frac{1}{156R}\left(\left(54z_A\left(\frac{h}{2}-z_A\right)-16R^2\right)\sin\frac{3\sqrt{3}z_A}{4R}-12\sqrt{3}R\left(\frac{h}{2}-z_A\right)\cos\frac{3\sqrt{3}z_A}{4R}\right)\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}y_N&=\frac{1}{3900R}\left(\left(-54g^2t^4+135ght^2-400R^2\right)\cos\left(\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}\right)+\left(1300R-60\sqrt{3}\left(t^2g-\frac{5h}{2}\right)\sin\left(\frac{3\sqrt{3}gt^2}{20R}\right)\right)R\right)\\&=\frac{1}{156R}\left(\left(54z_A\left(\frac{h}{2}-z_A\right)-16R^2\right)\cos\frac{3\sqrt{3}z_A}{4R}+12\sqrt{3}R\left(\frac{h}{2}-z_A\right)\sin\frac{3\sqrt{3}z_A}{4R}+52R^2\right)\end{aligned} \tag{26}$$

小球下降过程中 $F_N$ 的作用线与圆筒轴线间的距离

$$d=\sqrt{(x_N-x_O)^2+(y_N-y_O)^2}=\frac{1}{13}\sqrt{9[R+\frac{3z_A}{2R}(\frac{h}{2}-z_A)]^2+3(\frac{h}{2}-z_A)^2} \tag{27}$$

（2 分）

**第 7 题（20 分）**

（1）（本小题 6 分）

取分离体如图 a 所示，其中 $r = y\tan\alpha$， $q = \rho_w g(h-y)$，且薄壁圆锥的体积为 $V_C = \pi r l\delta = \dfrac{\pi r y}{\cos\alpha}\delta$（$l$ 为母线长度），则容器内沿母线方向的正应力

$$\sigma_m 2\pi r\delta\cos\alpha = \rho_w g\pi r^2(h-y) + G_w + G_c \qquad \text{（2 分）}$$

$$\sigma_m 2\pi r\delta\cos\alpha = \rho_w g\pi r^2(h-y) + \frac{1}{3}\pi r^2 y\rho_w g + \frac{\pi r y}{\cos\alpha}\delta\rho_c g \qquad \text{（2 分）}$$

即
$$\sigma_m = \frac{\rho_w g\tan\alpha}{2\delta\cos\alpha}\left(h - \frac{2}{3}y\right)y + \frac{\rho_c g}{2\cos^2\alpha}y \qquad \text{（2 分）}$$

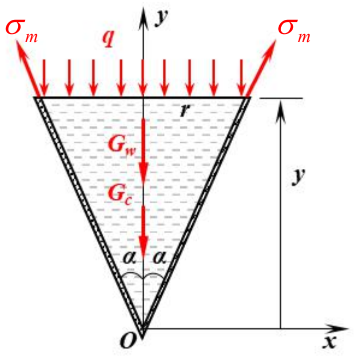



图 a

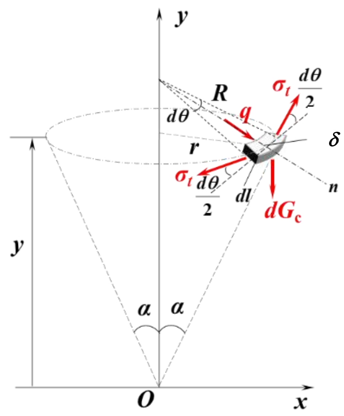



图 b

*（说明：在计算圆锥薄壳的体积时，亦可以按照内外两个圆锥的体积差进行计算。）*

（2）（本小题 6 分）

取分离体如图 b，其中 $R = \dfrac{r}{\cos\alpha} = \dfrac{y\tan\alpha}{\cos\alpha}$， $q = \rho_w g(h-y)$，且 $\sin\theta \approx \theta$，则容器内沿与母线垂直且与表面相切方向的正应力

$$qRd\theta dl = 2\sigma_t \sin\frac{d\theta}{2}\delta dl - \rho_c g(\delta Rd\theta dl)\sin\alpha = \sigma_t d\theta\delta dl - \rho_c g(\delta Rd\theta dl)\sin\alpha \qquad \text{（5 分）}$$

即
$$\sigma_t = \frac{qR}{\delta} + \rho_c gR\sin\alpha = \frac{\rho_w g\tan\alpha(h-y)y}{\delta\cos\alpha} + y\rho_c g\tan^2\alpha \qquad \text{（1 分）}$$

（3）（本小题 8 分）

首先需要确定圆锥体上的危险点，即最大正应力的位置与大小，也就是要确定 $\sigma_m$ 和 $\sigma_t$ 的最大值和位置。

1）先分析 $\sigma_m$：

$$\frac{d\sigma_m}{dy}=\frac{\rho_w g\tan\alpha}{2\delta\cos\alpha}(h-\frac{4}{3}y)+\frac{\rho_c g}{2\cos^2\alpha}=0$$ （1 分）

$$y=\frac{3}{4}h(1+\frac{\rho_c}{\rho_w}\frac{\delta}{h\sin\alpha})=\frac{3}{4}h(1+\frac{1}{30\sin 30°})=\frac{4}{5}h$$ （0.5 分）

$$\frac{d^2\sigma_m}{dy^2}=-\frac{2\rho_w g\tan\alpha}{3\delta\cos\alpha}<0$$ （0.5 分）

沿母线方向的正应力$\sigma_m$在 $y$=0.8$h$ 处达最大，其最大值为

$$\begin{aligned}\sigma_m&=\frac{\rho_w g\tan\alpha}{2\delta\cos\alpha}(h-\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}h)\times\frac{4}{5}h+\frac{\rho_c g}{2\cos^2\alpha}\times\frac{4}{5}h\\&=\frac{64}{5}\rho_w gh=12.8\rho_w gh\end{aligned}$$ （1 分）

2) 再分析$\sigma_t$：

$$\frac{d\sigma_t}{dy}=\frac{\rho_w g\tan\alpha(h-2y)}{\delta\cos\alpha}+\rho_c g\tan^2\alpha=0$$ （1 分）

$$y=\frac{h}{2}+\frac{\delta\rho_c}{2\rho_w}\sin\alpha=\frac{h}{2}(1+\frac{\sin 30°}{30})=0.508h\approx\frac{h}{2}$$ （0.5 分）

$$\frac{d^2\sigma_t}{dy^2}=-\frac{2\rho_w g\tan\alpha}{\delta\cos\alpha}<0$$ （0.5 分）

**解法 A：**沿与母线垂直且与表面相切方向的正应力$\sigma_t$在 $y$=0.508$h$ 处达最大，其最大值为：

$$\sigma_t=\frac{\rho_w g\tan\alpha(h-0.508h)\times 0.508h}{\delta\cos\alpha}+0.508h\times\rho_c g\tan^2\alpha=15.508\rho_w gh$$ (c) （1 分）

**解法 B:**或近似计算，沿与母线垂直且与表面相切方向的正应力$\sigma_t$在 $y$=$h$/2 处达最大，其最大值为:

$$\sigma_t=\frac{\rho_w gh^2\tan\alpha}{4\delta\cos\alpha}+\frac{h\rho_c g\tan^2\alpha}{2}=15.5\rho_w gh$$ (d) （1 分）

*（说明：由于(c)、(d)两式的结果差别不大，均为正确。）*

3) 危险点的相当应力：

显然，在 $y$=$h$/2 处的正应力$\sigma_t$是圆锥体上的最大正应力。

**解法 A：**

在该处内壁上的任一点为三向应力状态，主应力分别为

$$\sigma_1 = \sigma_t > 0 \qquad \sigma_2 = \sigma_m > 0 \qquad \sigma_3 = -\rho_w g \frac{h}{2} < 0 \qquad \text{（1 分）}$$

则第三强度理论的相当应力为

$$\begin{aligned}\sigma_{r3} &= \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\rho_w g h^2 \tan\alpha}{4\delta\cos\alpha} + \frac{h\rho_c g \tan^2\alpha}{2} + \frac{h\rho_w g}{2} \\ &= \rho_w g h(15.5 + \frac{1}{2}) = 16\rho_w g h\end{aligned} \qquad \text{(e)} \quad \text{（1 分）}$$

**解法 B:**

在该处外壁上的任一点为二向应力状态，主应力分别为

$$\sigma_1 = \sigma_t > 0 \qquad \sigma_2 = \sigma_m > 0 \qquad \sigma_3 = 0 \qquad \text{（1 分）}$$

则第三强度理论的相当应力为

$$\sigma_{r3} = \sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\rho_w g h^2 \tan\alpha}{4\delta\cos\alpha} + \frac{h\rho_c g \tan^2\alpha}{2} = 15.5\rho_w g h \qquad \text{(f)} \quad \text{（1 分）}$$

***（说明：由于水压的影响较小，(e)、(f) 两式的结果差别不大，均为正确。）***