

第十三届全国周培源大学生力学竞赛

(个人赛) 试题

出题学校：南京航空航天大学

(本试卷分为基础题和提高题两部分，满分 **120** 分，时间 **3** 小时 **30** 分)

说明：个人赛奖项分为全国特、一、二、三等奖和优秀奖。全国特、一、二等奖评选标准是：提高题得分进入全国前 5%，并且总得分排在全国前列，根据总得分名次最终确定获奖人。全国三等奖和优秀奖直接按赛区内总得分排名确定获奖人。

注意：试题请全部在答题纸上作答，否则作答无效。各题所得结果用分数或小数表示均可。

第一部分 基础题部分 (共 60 分)

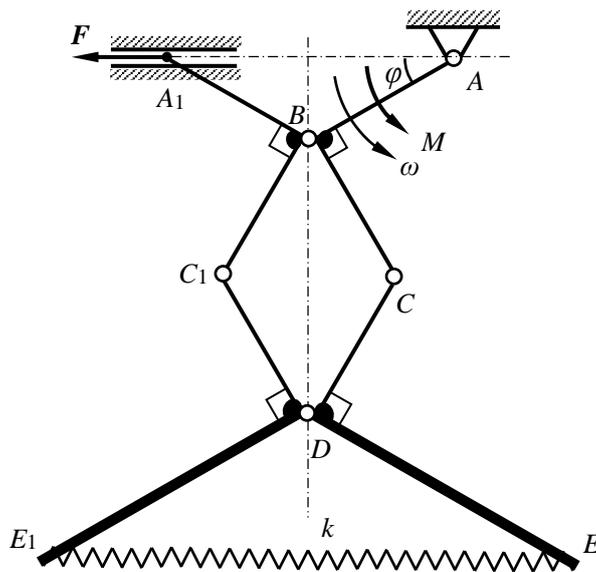
第 1 题 (18 分)

铅垂面内的机构如图所示，由直角杆 ABC 、 A_1BC_1 、 CDE 、 C_1DE_1 铰接而成，销钉 A_1 可沿固定水平滑槽运动， $AB=BC=A_1B=BC_1=CD=C_1D=a$ ， $DE=DE_1=2a$ 。

1) 已知图示瞬时 AB 与水平线 AA_1 的夹角为 φ ， ABC 的角速度为 ω ，求 CDE 和 C_1DE_1 的角速度 ω_{CDE} 、 $\omega_{C_1DE_1}$ ；(5 分)

2) 已知 ABC 上作用力偶 M ， E 和 E_1 点通过刚度为 k 、原长为 $2a$ 的弹簧连接，均质杆 DE 和 DE_1 的质量均为 m ，忽略其它杆的质量和各处摩擦。为使系统在 $\varphi = 45^\circ$ 的位置平衡，求销钉 A_1 上的水平力 F ；(5 分)

3) 若在上述平衡位置突然撤去力 F ，求该瞬时 ABC 的角加速度 α_{ABC} 。(8 分)



第 1 题图

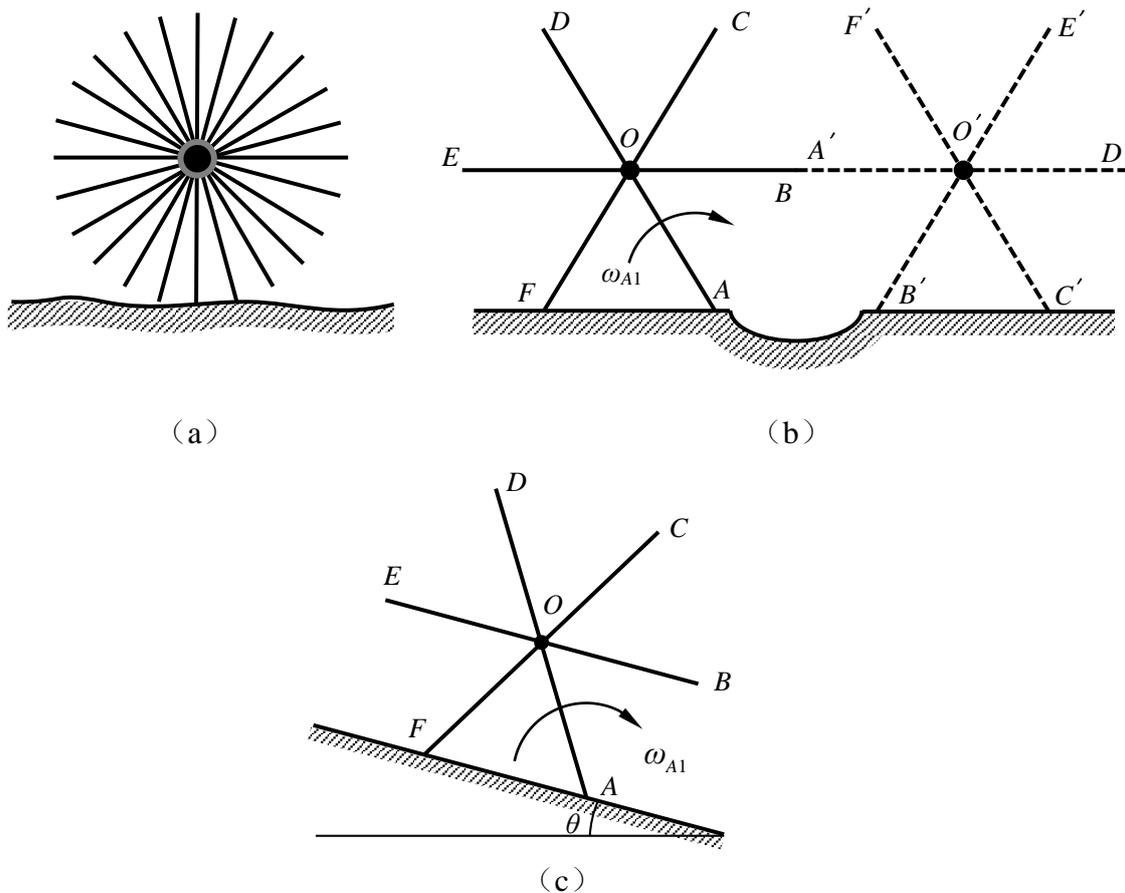
第 2 题 (12 分)

图(a)为可在火星上滚动的无轮缘车轮，由 n 根直杆在中点固结而成。假设 $n=3$ ，各杆质量均为 $2m$ 、长度均为 $2R$ ，相邻杆间的夹角均为 60° ，如图(b)所示。车轮在铅垂面内向右滚动，杆件各端点依次与路面发生完全塑性碰撞，且不发生相对滑动。端点 A 与路面碰撞前、后瞬时车轮的角速度分别记为 ω_{A0} 、 ω_{A1} ，端点 B 与路面碰撞前、后瞬时车轮的角速度分别记为 ω_{B0} 、 ω_{B1} 。已知重力加速度为 g 。

1) 求 ω_{B1} 与 ω_{B0} 的比值；(3 分)

2) 如图(b)所示，假设路面上与端点 A 、 B 、 C 碰撞的三个点位于同一高度，求车轮能够由图中实线位置滚动到虚线位置的 ω_{A1} 的最小值；(4 分)

3) 车轮沿倾角为 θ ($\theta < 30^\circ$) 的斜面向下滚动，如图(c)所示，为使 $\omega_{B1} = \omega_{A1}$ ，求 θ 应满足的关系式。(5 分)



第 2 题图

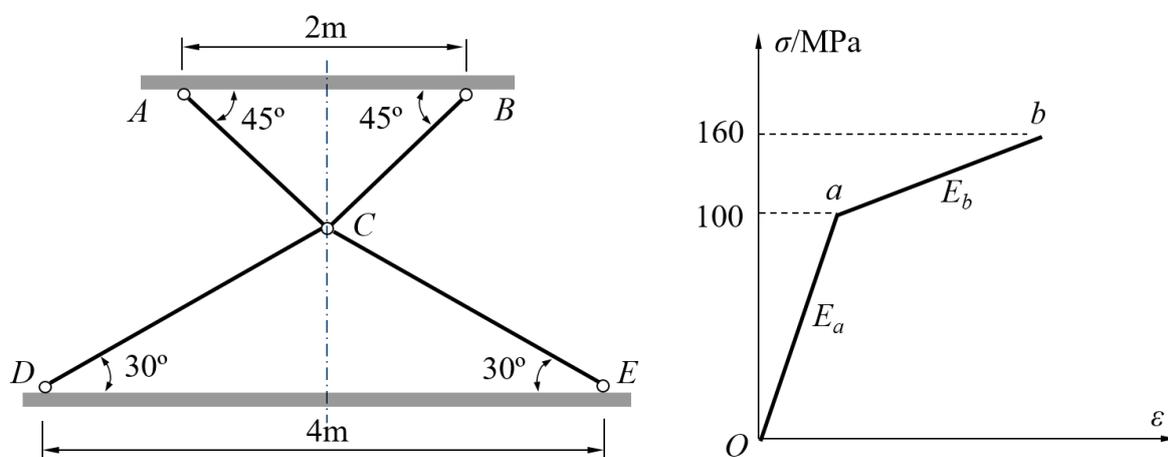
第3题 (15分)

平面杆系结构由四根材料相同的圆截面直杆组成，其中杆 AC 与杆 BC 长度相同、直径均为 $d_1=20\text{mm}$ ，杆 CD 与杆 CE 长度相同、直径均为 $d_2=40\text{mm}$ ，设计尺寸如图 (a) 所示。各杆材料的应力应变曲线如图 (b) 所示 (分段线性)， Oa 、 ab 段的弹性模量分别为 $E_a=200\text{GPa}$ ， $E_b=50\text{GPa}$ 。装配时发现杆 AC 和杆 BC 均比设计尺寸短了 0.3mm 。

1) 求装配完成后各杆的内力；(7分)

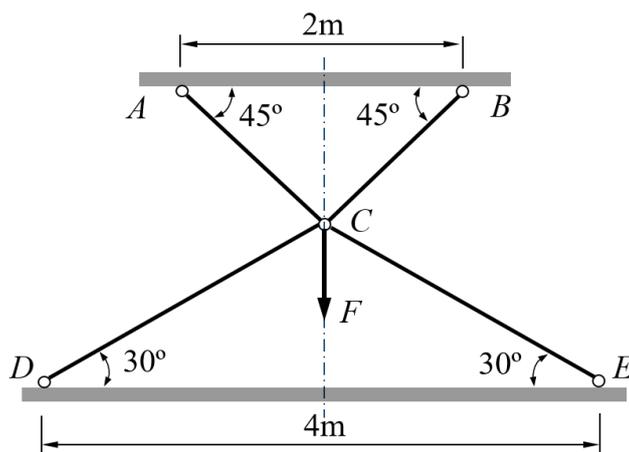
2) 装配完成后，在点 C 施加垂直向下的力 $F=90\text{kN}$ ，如图 (c) 所示，求各杆的内力。

(8分)



(a)

(b)



(c)

第3题图

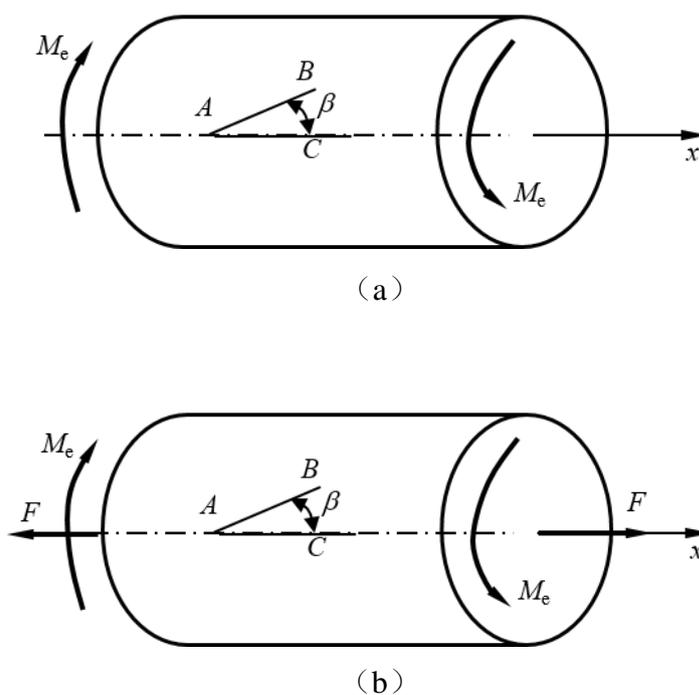
第 4 题 (15 分)

直径为 D 、长度为 l 的实心圆轴试件如图 (a) 所示。现在圆周表面画一微线段 AB ，其初始位置与水平线 AC 成 β 角。当圆轴两端受到外力偶矩 M_e 作用后，实验测得微线段 AB 顺时针偏转了 $\Delta\beta_1$ 。已知圆轴的材料常数 E 、 μ ，变形均在线弹性小变形范围内。

1) 求外力偶矩 M_e ；(5 分)

2) 在外力偶矩 M_e 作用下再施加轴向拉力 F ，如图 (b) 所示。实验测得微线段 AB 偏转角又增大了 $\Delta\beta_2$ ，求拉力 F ；(5 分)

3) 为提高实验测试灵敏度， $\Delta\beta$ 越大越好。当外力偶矩 M_e 和轴向拉力 F 同时作用且 $F = \frac{8M_e}{D}$ ， β 为何值时 $\Delta\beta$ 最大？(5 分)



第 4 题图

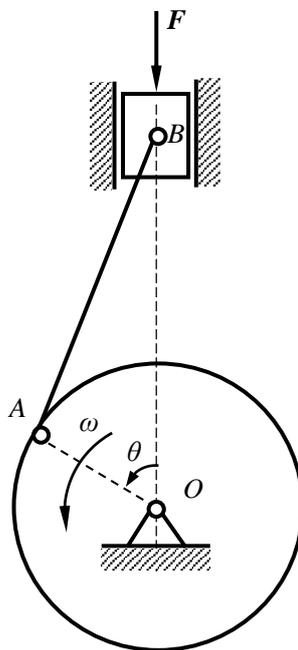
第二部分 提高题部分（共 60 分）

第 5 题 (15 分)

图示圆盘-连杆-活塞机构在铅垂平面内运动，圆盘 O 上 OA 的长度为 1000mm，连杆 AB 的长度为 2000mm、质量为 200kg，活塞 B 的质量为 200kg，所有构件均可视为均质体。在驱动力 F 作用下，圆盘 O 以匀角速度 $\omega=100\text{rad/s}$ 逆时针转动。考虑重力，不计摩擦。

1) 将圆盘 O 、连杆 AB 和活塞 B 均视为刚体。当 θ 为何值时，活塞 B 上驱动力 F 的大小有多解？当 $\theta=90^\circ$ 时，求活塞 B 上的驱动力 F ；（5 分）

2) 将连杆 AB 视为变形体（不考虑连杆 AB 的压杆稳定性问题）。已知连杆 AB 的横截面面积 $A=12.8\times 10^3\text{mm}^2$ ，抗弯截面系数 $W=1\times 10^6\text{mm}^3$ ，材料的许用应力 $[\sigma]=180\text{MPa}$ 。当机构运动到 $\theta=90^\circ$ 时，校核连杆 AB 的强度，并画出连杆 AB 弯矩图的大致形状。（10 分）

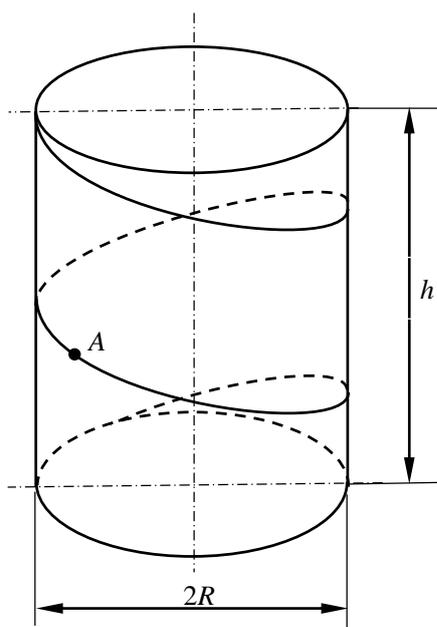


第 5 题图

第 6 题 (25 分)

图示圆筒直立放置在光滑水平面上，小球 A 可沿圆筒内壁上的螺旋线沟槽无摩擦下滑。已知小球 A 的质量为 m ，均质圆筒的质量为 $2m$ 、半径为 R 、高为 h ，螺旋线的升角 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 。初始时圆筒静止，将小球从螺旋线沟槽的顶部静止释放。假设小球下降过程中圆筒不会翻倒，水平面对圆筒的支承力的合力记为 F_N 。求：

- 1) 圆筒的质心相对地面的运动轨迹；(3 分)
- 2) 小球运动到圆筒底部时，在地面上观察到的小球运动轨迹的总长度 s ；(6 分)
- 3) 小球下降过程中 F_N 的大小；(6 分)
- 4) 小球下降过程中 F_N 的作用线与圆筒轴线间的距离 d (表示为小球下降的垂直距离 z_A 的函数)。(10 分)

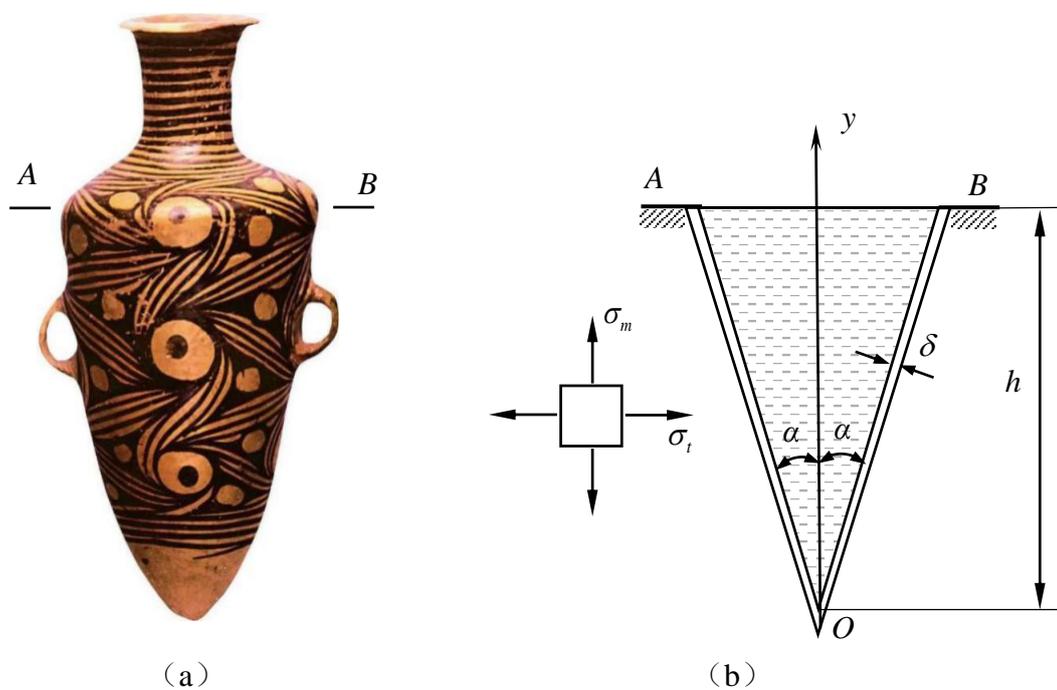


第 6 题图

第 7 题 (20 分)

“小口尖底彩陶瓶”是距今约 6000 年新石器时代（仰韶文化）的汲水器或酒礼器，如图（a）所示。现将其简化为如图（b）所示的充满液体的圆锥形薄壁容器，处于铅垂直立位置，上沿周边支承，圆锥角为 2α ，其体积按薄壁结构计算。容器的密度为 ρ_c ，容器各处壁厚均为 δ ，液体的密度为 ρ_w ，液面高度为 h 。

- 1) 求容器内沿母线方向的正应力 σ_m ；(6 分)
- 2) 求容器内与母线垂直且与表面相切方向的正应力 σ_t ；(6 分)
- 3) 设 $\rho_c=3\rho_w$ ， $\delta=\frac{h}{90}$ ， $\alpha=30^\circ$ ，根据第三强度理论求容器内的最大相当应力。(8 分)



第 7 题图