第十二届全国周培源大学生力学竞赛 (个人赛) 试题

出题学校:清华大学

(本试卷分为基础题和提高题两部分 满分 120 分 时间 3 小时 30 分)

说明:个人赛奖项分为全国特、一、二、三等奖和优秀奖。全国特、一、二等 奖评选标准是:提高题得分进入全国前 5%,并且总得分排在全国前列,根据总 得分名次最终确定获奖者。全国三等奖和优秀奖直接按赛区内总得分排名确定 获奖者。

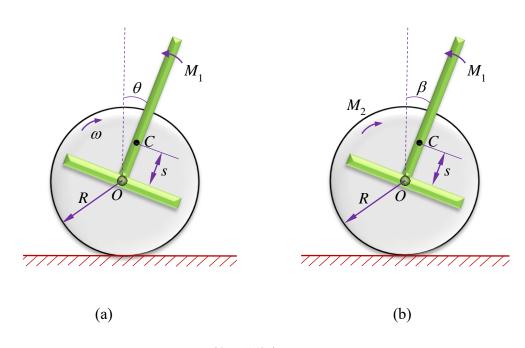
注意: 试题请全部在答题纸上作答, 否则作答无效。各题所得结果用分数或小数表示均可。

第一部分 基础题部分(共60分)

第1题 (30分)

图示铅垂平面内的系统,T 形杆质量为 m_1 ,对质心 C 的转动惯量为 J_1 ;圆盘半径为 R, 质量为 m_2 , 对质心 O 的转动惯量为 J_2 ; 杆和盘光滑铰接于点 O, $\overline{CO}=s$ 。设重力加速度为 g、地面和盘间的静摩擦因数为 μ_0 、动摩擦因数为 μ ,不计滚动摩阻。

- (1) 如图(a),盘以匀角速度 ω 沿水平地面向右作纯滚动。为使杆保持与铅垂方向夹角 θ ($0 \le \theta < \pi/2$) 不变,需在杆上施加多大的力偶矩 M_1 ? 并求此时地面作用于盘的摩擦力 F_{i} (5 分)
- (2) 如图(b),当盘上施加顺时针的常力偶矩 M_2 ,同时 M_1 =0,杆作平移,分析圆盘的可能运动,并求杆与铅垂方向夹角 β 、盘的角加速度 ε 及地面对盘的摩擦力 F。(25 分)

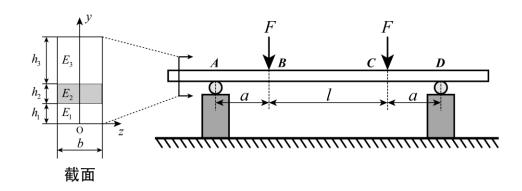


第1题图

第2题(30分)

如图所示宽为 b 的矩形截面三层复合梁,各层固结为一体;已知各层材料弹性 模量 分别为 E_1 、 E_2 和 E_3 ,相应的厚度分别为 h_1 、 h_2 和 h_3 ,其中 $e_1 = E_3 = E_2/5 = E$, $e_2 = h_3/50 = h$ 。对其进行四点弯曲试验。

- (1) 试求中性层的位置; (15分)
- (2) 设弯曲后 BC 段中性层曲率半径为 ρ ,试写出该段横截面上的正应力与 ρ 的关系,画出正应力的分布图;(9分)
- (3) 当层 2 断裂时,层 1 和层 3 仍为线弹性变形,BC 段梁上缘的曲率半径为 R,由此计算层 2 材料的强度极限 $\sigma_{\rm b}$ 。(6 分)



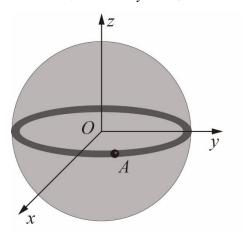
第2题图

第二部分 提高题部分(共60分)

第3题 (30分)

在真空中处于失重状态的均质球形刚体,其半径 $r=1\,\mathrm{m}$,质量 $M=2.5\,\mathrm{kg}$,对直径的转动惯量 $J=1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2$,球体固连坐标系 $O\!xyz$ 如图所示。另有质量 $m=1\,\mathrm{kg}$ 的质点 A 在内力驱动下沿球体大圆上的光滑无质量管道(位于 $O\!xy$ 平面内)以相对速度 $v_r=1\,\mathrm{m/s}$ 运动。初始时,系统质心速度为零,质点 A 在 x 轴上。

- (1) 试判断系统自由度; (3分)
- (2) 当球体初始角速度 $\omega_{x0} = 0$; $\omega_{y0} = 0$; $\omega_{z0} = 1/s$ 时, 求球心 O 的绝对速度 \boldsymbol{v}_{o} , 球体的角速度沿 z 轴分量 ω_{z} , 质点 A 的绝对速度 \boldsymbol{v}_{A} 和绝对加速度 \boldsymbol{a}_{A} ; (17 分)
- (3) 当球体初始角速度 $\omega_{x0} = 1/s$; $\omega_{y0} = 0$; $\omega_{z0} = 0.4/s$ 时,求球体的角速度 ω 和 角加速度 ε 。(提示:建立另一个动系 Ox'y'z',使质点 A 始终在 x'轴上)(10 分)

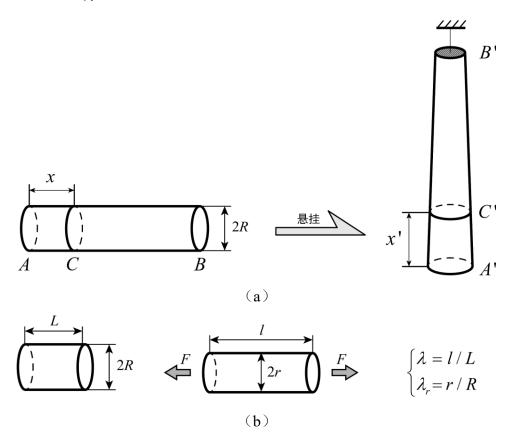


第3题图

第4题 (20分)

如图 (a) 所示,截面初始半径为 R 、密度为 ρ 的圆柱体 AB (材料不可压缩) 竖直悬挂,在重力作用下(重力加速度为 g) 变形。

- (1) 截面 C 变形前距 A 端为 x,试求悬挂后该截面轴力; (3分)
- (2) 设变形后轴力与变形的关系为 $F = \pi r^2 G(\lambda^2 \lambda_r^2)$,其中G为剪切模量, λ 和 λ_r 为轴向和径向的伸长比(伸长比定义如图(b)所示)。试根据题设推导 λ 和 λ_r 之间的关系,并建立变形后截面半径r 随初始截面位置x的变化关系;(10分)
- (3) 若将变形后 A'C'段(测得其长度为x')近似为圆台,试求材料的剪切模量 G。(7分)

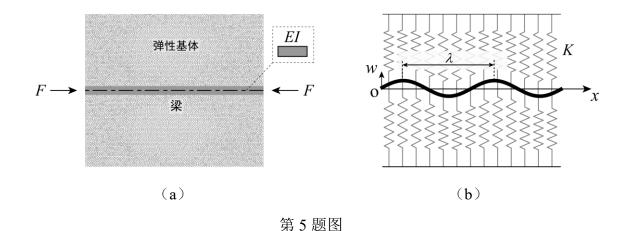


第4题图

第5题 (10分)

如图(a)所示,弹性软基体中有一细长等截面梁,弯曲刚度EI。梁受轴向压缩。

- (1) 若将弹性基体等效为分布弹簧,其刚度为K(弹性基体对梁单位长度上产生单位挠度时的反力),试根据图(b)建立分析该长梁失稳的平衡微分方程;(3分)
- (2) 假设失稳模式为 $w = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} x$,试求梁发生失稳时的临界载荷 F_{cr} 和临界 失稳波长 λ_{cr} 。(7 分)



6/6