第十二届全国周培源大学生力学竞赛
（个人赛）试题

出题学校：清华大学

（本试卷分为基础题和提高题两部分　满分 120 分　时间 3 小时 30 分）

说明： 个人赛奖项分为全国特、一、二、三等奖和优秀奖。全国特、一、二等奖评选标准是：提高题得分进入全国前 5%，并且总得分排在全国前列，根据总得分名次最终确定获奖人。全国三等奖和优秀奖直接按赛区内总得分排名确定获奖人。

注意：试题请全部在答题纸上作答，否则作答无效。 各题所得结果用分数或小数表示均可。

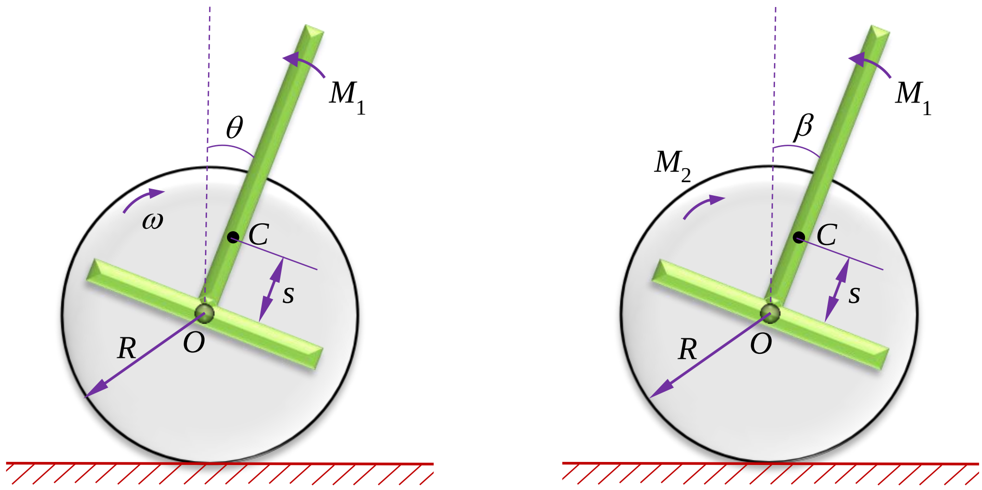
第一部分 基础题部分（共 60 分）

第 1 题 (30 分)

图示铅垂平面内的系统，T 形杆质量为 m_1，对质心 C 的转动惯量为 J_1；圆盘半径为 R，质量为 m_2，对质心 O 的转动惯量为 J_2；杆和盘光滑铰接于点 O，$\overline{CO}=s$。设重力加速度为 g、地面和盘间的静摩擦因数为μ_0、动摩擦因数为μ，不计滚动摩阻。

(1) 如图(a)，盘以匀角速度ω沿水平地面向右作纯滚动。为使杆保持与铅垂方向夹角θ（$0 \le \theta < \pi/2$）不变，需在杆上施加多大的力偶矩 M_1？并求此时地面作用于盘的摩擦力 F；(5 分)

(2) 如图(b)，当盘上施加顺时针的常力偶矩 M_2，同时 $M_1 = 0$，杆作平移，分析圆盘的可能运动，并求杆与铅垂方向夹角β、盘的角加速度ε及地面对盘的摩擦力 F。(25 分)



(a) (b)

第 1 题图

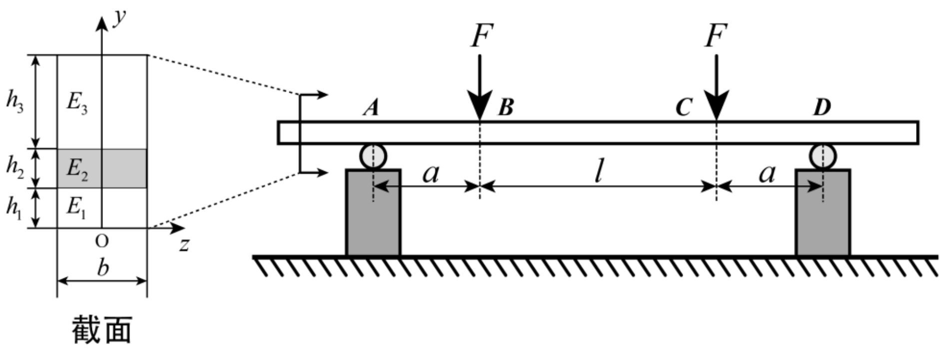
第 2 题（30 分）

如图所示宽为 b 的矩形截面三层复合梁，各层固结为一体；已知各层材料弹性模量分别为 E_1 、 E_2 和 E_3 ，相应的厚度分别为 h_1 、 h_2 和 h_3 ，其中 $E_1 = E_3 = E_2 / 5 = 1$， $h_1 = h_2 = h_3 / 50 = h$ 。对其进行四点弯曲试验。

（1） 试求中性层的位置；（15 分）

（2） 设弯曲后 BC 段中性层曲率半径为 ρ，试写出该段横截面上的正应力与 ρ 的关系，画出正应力的分布图；（9 分）

（3） 当层 2 断裂时，层 1 和层 3 仍为线弹性变形，BC 段梁上缘的曲率半径为 R，由此计算层 2 材料的强度极限 σ_b 。（6 分）



第 2 题图

第二部分 提高题部分（共 60 分）

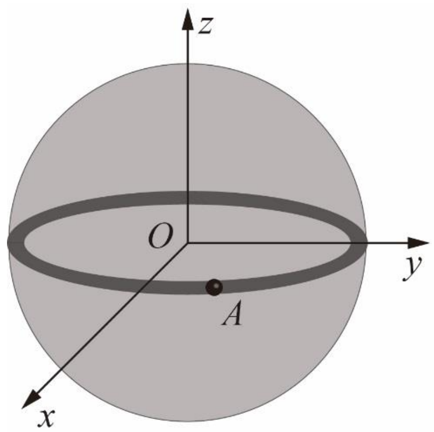
第 3 题 (30 分)

在真空中处于失重状态的均质球形刚体，其半径 $r=1\,\mathrm{m}$，质量 $M=2.5\,\mathrm{kg}$，对直径的转动惯量 $J=1\,\mathrm{kg\cdot m^2}$，球体固连坐标系 $Oxyz$ 如图所示。另有质量 $m=1\,\mathrm{kg}$ 的质点 A 在内力驱动下沿球体大圆上的光滑无质量管道（位于 Oxy 平面内）以相对速度 $v_\mathrm{r}=1\,\mathrm{m/s}$ 运动。初始时，系统质心速度为零，质点 A 在 x 轴上。

(1) 试判断系统自由度；(3 分)

(2) 当球体初始角速度 $\omega_{x0}=0;\omega_{y0}=0;\omega_{z0}=1\,/\mathrm{s}$ 时，求球心 O 的绝对速度 $\boldsymbol{v}_O$，球体的角速度沿 z 轴分量 ω_z，质点 A 的绝对速度 $\boldsymbol{v}_A$ 和绝对加速度 $\boldsymbol{a}_A$；(17 分)

(3) 当球体初始角速度 $\omega_{x0}=1\,/\mathrm{s};\omega_{y0}=0;\omega_{z0}=0.4\,/\mathrm{s}$ 时，求球体的角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 和角加速度 $\boldsymbol{\varepsilon}$。【提示：建立另一个动系 $Ox'y'z'$，使质点 A 始终在 x' 轴上】(10 分)



第 3 题图

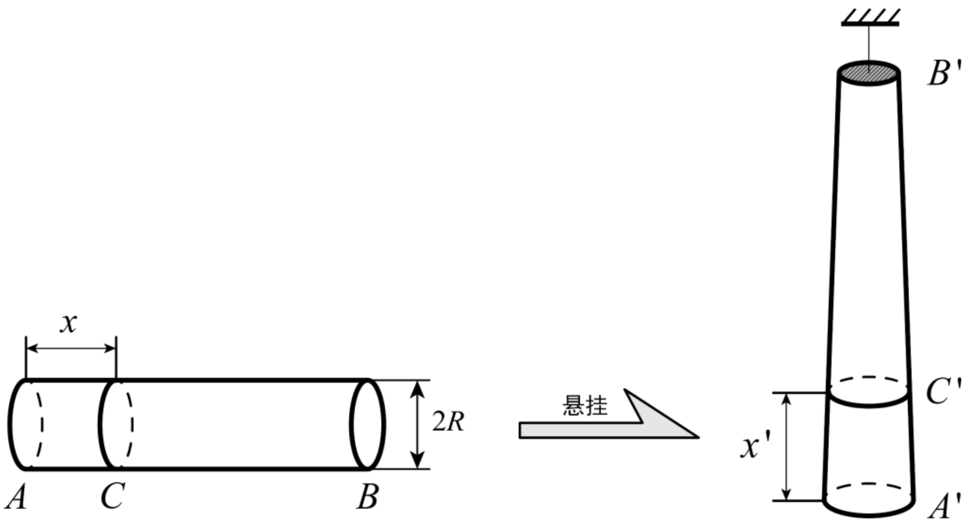
第 4 题 （20 分）

如图（a）所示，截面初始半径为 R 、密度为 ρ 的圆柱体 AB（材料不可压缩）竖直悬挂，在重力作用下（重力加速度为 g ）变形。

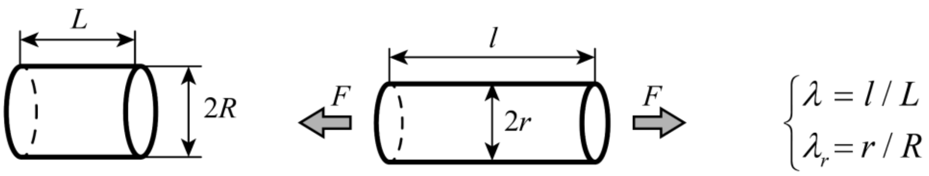
（1） 截面 C 变形前距 A 端为 x ，试求悬挂后该截面轴力；（3 分）

（2） 设变形后轴力与变形的关系为 $F=\pi r^2 G\left(\lambda^2-\lambda_r^2\right)$，其中 G 为剪切模量，λ 和 λ_r 为轴向和径向的伸长比（伸长比定义如图（b）所示）。试根据题设推导 λ 和 λ_r 之间的关系，并建立变形后截面半径 r 随初始截面位置 x 的变化关系；（10 分）

（3） 若将变形后 $A'C'$段（测得其长度为 x' ）近似为圆台，试求材料的剪切模量 G 。（7 分）



（a）



（b）

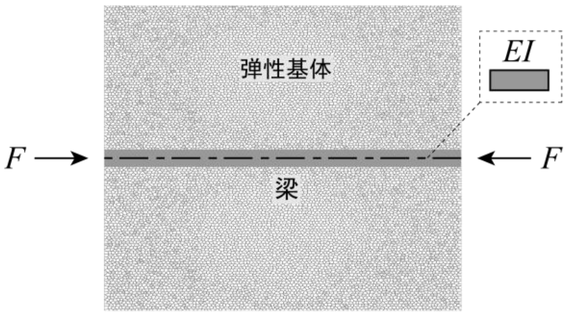
第 4 题图

第 5 题 （10 分）

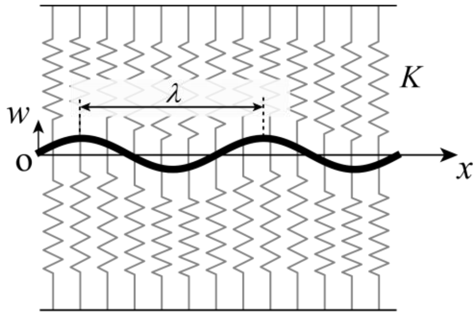
如图（a）所示，弹性软基体中有一细长等截面梁，弯曲刚度 EI。梁受轴向压缩。

（1） 若将弹性基体等效为分布弹簧，其刚度为 K（弹性基体对梁单位长度上产生单位挠度时的反力），试根据图（b）建立分析该长梁失稳的平衡微分方程；（3 分）

（2） 假设失稳模式为 $w = A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x$，试求梁发生失稳时的临界载荷 F_{cr} 和临界失稳波长 λ_{cr}。（7 分）



（a）



（b）

第 5 题图

第十二届全国周培源大学生力学竞赛
（个人赛）试题参考答案及详细解答

出题学校：清华大学

（本试卷分为基础题和提高题两部分　满分 120 分　时间 3 小时 30 分）

评分总体原则

采用扣分制或加分制。采用扣分制时，建议最终所扣分数总和不超过题目（或问题）总分的一半。采用加分制时，建议最终所给分数总和不超过题目（或问题）总分的一半。如果学生的解题方法和参考答案不同，则按以下几种情况分别处理：

(1) 如果学生给出的最终结果和参考答案相同，建议采用扣分制：侧重检查学生的解题过程有无不严谨的地方或小的概念错误（未影响结果），如果有的话，建议每一处错误可酌情扣 1~2 分。

(2) 如果学生给出的最终结果和参考答案不同，

（i）如果学生解答的总体思路合理、清晰，建议采用扣分制：在检查学生的解题过程时侧重区分某错误是概念错误还是计算错误。建议对于每一处概念错误扣 5 分或以上，对每一处计算错误酌情扣 1~2 分。对于由一处计算错误所引起的后续计算结果错误，只按一次错误扣分，计算错误不累计扣分。

（ii）如果学生解答的总体思路不清晰，建议采用加分制：在检查学生的解题过程时侧重寻找其局部正确、合理的部分，酌情给分。

一、参考答案

第一部分 基础题部分参考答案（共 60 分）

第 1 题 (30 分)

(1) $M_1 = m_1 gs\sin\theta$， $F = 0$ 。 (5 分)

(2) 圆盘不打滑（纯滚动）时， $\mu_0 \ge \dfrac{RM_2}{[J_2 + (m_1+m_2)R^2]g}$，

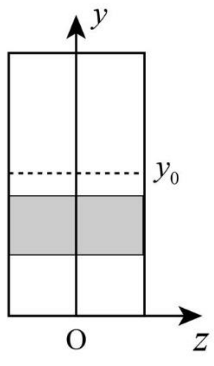
$\beta = \arctan\left(\dfrac{RM_2}{[J_2 + (m_1+m_2)R^2]g}\right)$， $\varepsilon = \dfrac{M_2}{J_2 + (m_1+m_2)R^2}$， $F = \dfrac{(m_1+m_2)RM_2}{J_2 + (m_1+m_2)R^2}$；

圆盘打滑（又滚又滑）时， $\mu_0 < \dfrac{RM_2}{[J_2 + (m_1+m_2)R^2]g}$，

$\beta = \arctan(\mu)$， $\varepsilon = \dfrac{M_2 - \mu(m_1+m_2)gR}{J_2}$， $F = \mu(m_1+m_2)g$ 。 (25 分)

第 2 题 (30 分)

(1) 建立 Oyz 坐标系如下图：

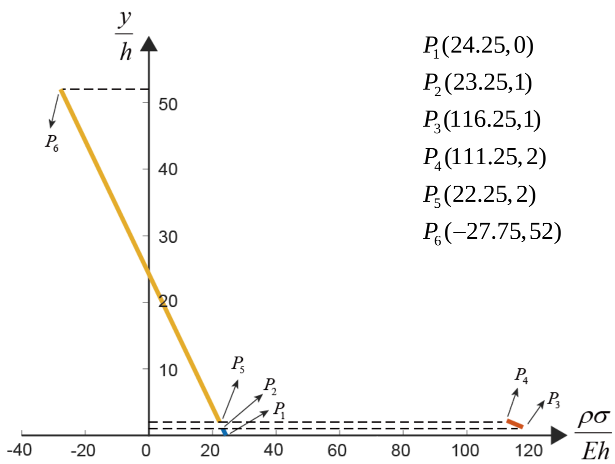


中心轴位置 $y_0 = 24.25h$； （15 分）

(2） BC 段正应力表达式如下：

$$
\begin{cases}
\sigma_1 = -E\dfrac{y-24.25h}{\rho}, & y\in[0,h) \\
\sigma_2 = -5E\dfrac{y-24.25h}{\rho}, & y\in(h,2h) \\
\sigma_3 = -E\dfrac{y-24.25h}{\rho}, & y\in(2h,52h]
\end{cases}
$$
；（5 分）

正应力分布如下图所示：



（4 分）

(3) 2 层开裂时，材料强度极限：$\sigma_b = E\dfrac{116.25h}{R+27.75h}$。（9 分）

第二部分 提高题部分参考答案（共 60 分）

第 3 题 (30 分)

(1) 系统自由度为：6。 (3 分)

(2) $v_O=\dfrac{4}{7}$， $\omega_z=1$，$v_A=\dfrac{10}{7}$，$\boldsymbol{a}_A=-\dfrac{20}{7}\boldsymbol{n}$。 (17 分)

(3) $\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3$，其中$\begin{cases}\omega_1=1\\ \omega_2=0\\ \omega_3=0.4\end{cases}$；$\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{e}_2$。 (10 分)

其中，$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$为动系 $O\ x'y'z'$三个轴的单位矢量，动系 $O\ x'y'z'$的 x'轴总是在质点 A 上，z'轴与固连系的 z 轴一致。

第 4 题 (20 分)

(1) 截面 C'处的轴力：$F=\rho\pi R^2xg$； (3 分)

(2) λ和λ_r之间的关系：$\lambda\cdot\lambda_r^2=1$ (5 分)；

r 随 x 的变化关系：$\left(\dfrac{r}{R}\right)^6+\dfrac{\rho xg}{G}\left(\dfrac{r}{R}\right)^2-1=0$； (5 分)

(3) 材料剪切模量：$G=x\rho g\left(\lambda_r^{-2}-\lambda_r^{4}\right)^{-1}$，其中$\lambda_r=\sqrt{\dfrac{3x}{x'}-\dfrac{3}{4}}-\dfrac{1}{2}$。 (7 分)

第 5 题 (10 分)

(1) 梁的平衡微分方程：$EI\dfrac{\mathrm{d}^4w}{\mathrm{d}x^4}+F\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}+2Kw=0$ ； (3 分)

(2) 临界载荷$F_c=\sqrt{8EIK}$，临界失稳波长$\lambda_c=2\pi\left(\dfrac{EI}{2K}\right)^{\frac{1}{4}}$ 。 (7 分)

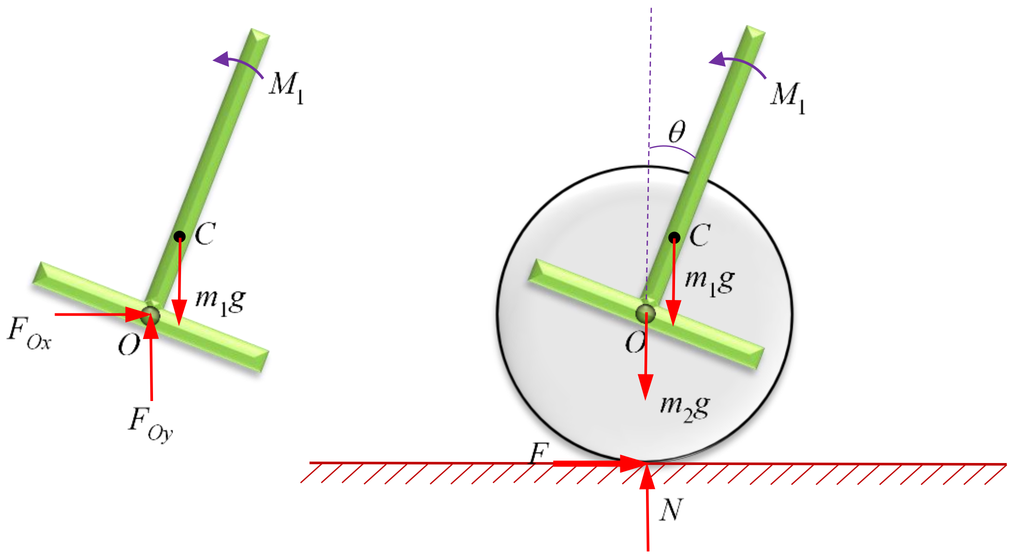
二、详细解答及评分标准

第一部分 基础题部分详细解答及评分标准（共 60 分）

第 1 题 (30 分)

解答与评分标准

(1) （本小题 5 分）本问可以在相对地面匀速平动的惯性参考系下应用力系平衡求解，也可以在地面固定参考系下应用质心运动定理和对质心的动量矩定理求解或者应用对动点 O 的动量矩定理求解。



题解图 1

(1.1) 求力偶矩 M_1（3 分）

如题解图 1，分别以 T 形杆和系统整体为对象进行受力分析。

解法一（建立匀速平动的惯性参考系）：

T 形杆作水平匀速平移，建立原点在盘心 O、随盘心一起运动的水平平移参考系（惯性参考系），以 T 形杆为研究对象，T 形杆在该惯性系下保持相对静止，由对 O 点的力矩平衡方程得

力偶矩 M_1 大小：

$$M_1 = m_1 g s \sin\theta \qquad （1.1）（3 分）$$

解法二（在地面固定参考系下，应用对动点的动量矩定理）、

在地面固定参考系下，以 T 形杆为研究对象，对动点 O 应用动量矩定理：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} - m\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{M}_O^{(\mathrm{e})}$$ 或其他形式（动静法）： $$J_O\boldsymbol{\varepsilon} - \overline{\boldsymbol{OC}} \times (-m\boldsymbol{a}_O) = \boldsymbol{M}_O^{(\mathrm{e})}$$

（1.2）

由于 T 形杆水平匀速平动，所以上式左端项为零，得

力偶矩 M_1 大小：

$$M_1 = m_1 g s \sin\theta$$ （1.3）（3 分）

(1.2) 求摩擦力（2 分）对圆盘和杆构成的系统整体沿水平方向应用动量定理，因系统水平动量为常数，所以

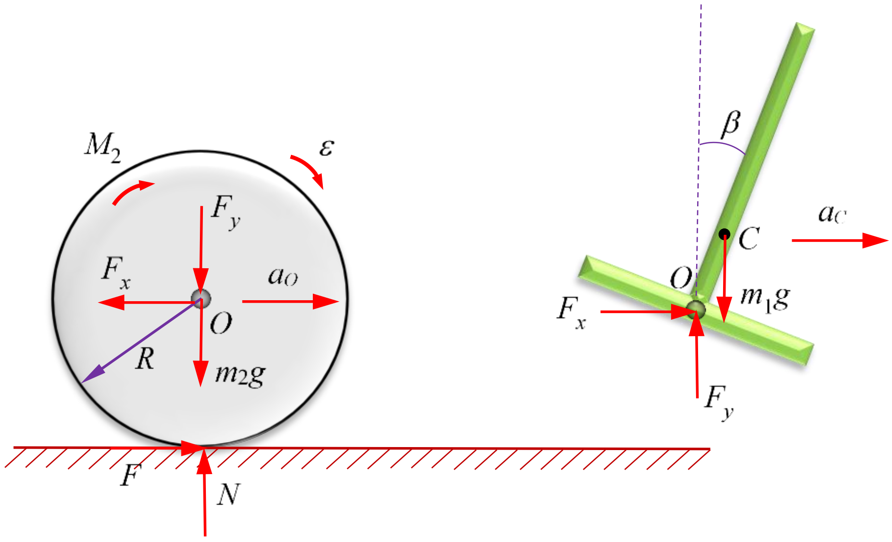
地面摩擦力为：

$$\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t} = F = 0$$ （1.4）（2 分）

(2)（本小题 25 分）本问可以应用动量定理（质心运动定理）和动量矩定理求解；也可以应用达朗贝尔原理（动静法）求解。（说明：列写系统方程 12 分，分情况讨论和求解部分 13 分；其中第一种情况（盘不打滑）讨论和求解占 7 分，第二种情况（盘打滑）讨论和求解占 6 分）

设圆盘角加速度为ε，盘心加速度为 a_O 。T 形杆做水平平动，加速度 $a_C = a_O$，角加速度为零。首先列写系统方程。

方法 1、应用动量和动量矩定理列写系统方程：



题解图 2

(2.1) 方法 1 第一种解法：系统方程列写（12 分）（分别对圆盘和 T 形杆列平面运动微分方程）

如题解图 2 对 T 形杆和盘分别进行受力分析和运动分析，建立平面运动微分方程。

注意到 $a_C = a_O$，对 T 形杆有：

$$m_1 a_O = F_x \qquad (1.5)（2 分）$$

$$0 = F_y - m_1 g \qquad (1.6)（2 分）$$

$$-F_x s\cos\beta + F_y s\sin\beta = 0 \qquad (1.7)（2 分）$$

对轮有：

$$m_2 a_O = F - F_x \qquad (1.8)（2 分）$$

$$0 = N - F_y - m_2 \qquad (1.9)（2 分）$$

$$J_2\varepsilon = M_2 - FR \qquad (1.10)（2 分）$$

(2.2) 方法 1 第二种解法：系统方程列写（12 分）（对系统整体应用质心运动定理和动量矩定理，再配合对圆盘或 T 形杆列写一个动量矩定理）

注意到 $a_C = a_O$，对系统整体，由质心运动定理：

$$m_1 a_O + m_2 a_O = F \qquad (1.11)（2 分）$$

$$m_1 g + m_2 g = N \qquad (1.12)（2 分）$$

对动点 O（圆盘中心）列写动量矩定理：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}_O}{\mathrm{d}t} - m\boldsymbol{v}_{C'} \times \boldsymbol{v}_O = \boldsymbol{M}_O^{(\mathrm{e})}$$

上式中 $\boldsymbol{v}_{C'}$ 为系统质心速度，不难发现 $\boldsymbol{v}_{C'} = \boldsymbol{v}_O$ ，所以上式中等式左端第二项为零。因此有：

$$J_2\varepsilon + m_1 a_O s\cos\beta = M_2 - FR + m_1 g s\sin\beta \qquad (1.13)（6 分）$$

上式中等式左端第二项为T形杆对 O 点的动量矩的时间导数，漏此项扣3分。

另外再对圆盘应用对质心 O 的动量矩定理，可得第 4 个补充方程：

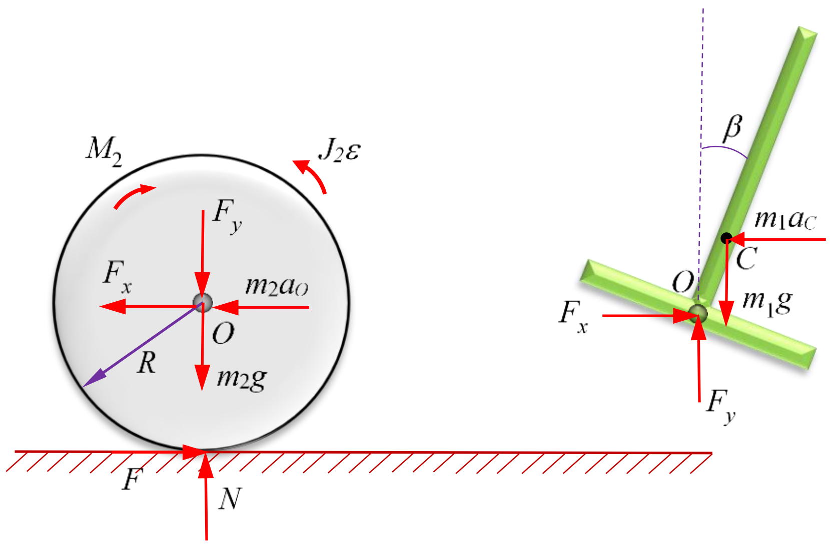
$$J_2\varepsilon = M_2 - FR \qquad (1.14)（2 分）$$

或者以 T 形杆为对象，对动点 O 应用动量矩定理，可得第 4 个补充方程：

$$m_1 g s\sin\beta = m_1 a_O s\cos\beta \qquad (1.15)$$

由以上四个方程（（1.11）-（1.14），或（1.11）-（1.13），（1.15））同样可解出轮角加速度、地面摩擦力和支持力、T 形杆的倾角这四个未知量。

方法 2、应用达朗贝尔原理（动静法）列写系统方程：（说明：达朗贝尔原理的方程与动量、动量矩的方程一一对应，对应方程采用与上面完全相同的公式编号，以便求解和讨论过程中叙述的统一。）



题解图 3

(2.1) 解法一：系统方程列写（12 分）（分别对圆盘和 T 形杆列受力平衡方程）

如题解图 3，使用达朗贝尔原理添加惯性力和惯性力矩后，对 T 形杆和盘分别进行受力平衡分析，建立平面受力平衡方程。

注意到 $a_C = a_O$，对 T 形杆有：

$$F_x - m_1 a_O = 0 \quad (1.5)（2 分）$$

$$F_y - m_1 g = 0 \quad (1.6)（2 分）$$

$$-F_x s\cos\beta + F_y s\sin\beta = 0 \quad (1.7)（2 分）$$

对轮有：

$$F - F_x - m_2 a_O = 0 \quad (1.8)（2 分）$$

$$N - F_y - m_2 g = 0 \quad (1.9)（2 分）$$

$$M_2 - FR - J_2\varepsilon = 0 \quad (1.10)（2 分）$$

(2.2) 解法二：系统方程列写（12 分）（对系统整体列受力平衡方程，再配合对圆盘或 T 形杆列写一个受力平衡方程）

注意到 $a_C = a_O$，对系统整体，水平和竖直方向受力平衡：

$$F - m_1 a_O - m_2 a_O = 0 \quad (1.11)（2 分）$$

$$N - m_1 g - m_2 g = 0 \quad (1.12)（2 分）$$

对系统整体，考虑对 O 点的力矩平衡：

$$-M_2+FR-m_1gs\sin\beta+m_1a_Os\cos\beta+J_2\varepsilon=0$$ （1.13）（6 分）

上式中等式漏写 $m_1a_Os\cos\beta$ 项扣 3 分。（注：此处也可以以圆盘与地面接触点为矩心，建立力矩平衡方程，列写正确同样得 6 分）

另外再以圆盘为对象，对质心 O 建立力矩平衡方程，可得第 4 个补充方程：

$$-M_2+FR+J_2\varepsilon=0$$ （1.14）（2 分）

或者以 T 形杆为对象，对点 O 建立力矩平衡方程，可得第 4 个补充方程：

$$-m_1gs\sin\beta+m_1a_Os\cos\beta=0$$ （1.15）

由以上四个方程（（1.11）-（1.14），或（1.11）-（1.13），（1.15））同样可解出轮角加速度、地面摩擦力和支持力、T 形杆的倾角这四个未知量。

以下为具体求解和讨论过程（以解法一为例）

下面分情况讨论圆盘的可能运动：不打滑（即纯滚动）或打滑（即又滚又滑）。

情况一：如果圆盘不打滑（纯滚动）（7 分）：

$$F\le\mu_0N$$

系统为单自由度系统，有：

$$a_O=\varepsilon R$$ （1.16）

由（1.9），（1.6）得

地面对盘的支持力：

$$N=(m_1+m_2)g$$ （1.17）

（1.5）代入（1.8），并考虑（1.16），有：

$$F=(m_1+m_2)a_O=(m_1+m_2)\varepsilon$$ （1.18）

（1.18）代入（1.10）得

$$M_2=[J_2+(m_1+m_2)R^2]\varepsilon$$ （1.19）

圆盘角加速度：

$$\varepsilon=\frac{M_2}{J_2+(m_1+m_2)R^2}$$ （1.20）（2 分）

圆盘盘心加速度：

$$a_O = \varepsilon R = \frac{M_2 R}{J_2 + (m_1 + m_2)R^2} \tag{1.21}$$

（1.20）代入（1.18）得

地面对盘的摩擦力：

$$F = \frac{(m_1 + m_2)RM_2}{J_2 + (m_1 + m_2)R^2}$$ （1.22）（2 分）

（1.5）（1.6）代入（1.7）有：

$$-m_1 \varepsilon Rs\cos\beta + m_1 gs\sin\beta = 0 \tag{1.23}$$

T 形杆倾角：

$$\tan\beta = \frac{\varepsilon R}{g} = \frac{RM_2}{[J_2 + (m_1 + m_2)R^2]g} \tag{1.24}$$

即

$$\beta = \arctan\left(\frac{RM_2}{[J_2 + (m_1 + m_2)R^2]g}\right)$$ （1.25）（2 分）

由圆盘纯滚动（不打滑）条件：

$$F \le \mu_0 N \tag{1.26}$$

把（1.17）和（1.22）代入（1.26）即

$$\mu_0 \ge \frac{RM_2}{[J_2 + (m_1 + m_2)R^2]g}$$ （1.27）（1 分）

如果上述条件（1.27）不满足，即 $\mu_0 < \dfrac{RM_2}{[J_2 + (m_1 + m_2)R^2]g}$ 或者 $F > \mu_0 N$ 时，圆盘无法做纯滚动，而是又滚又滑，此时按下述情况二分析。

情况二：圆盘打滑（又滚又滑）（$\mu_0 < \dfrac{RM_2}{[J_2 + (m_1 + m_2)R^2]g}$）（6 分）

此时系统为双自由度系统，地面摩擦力和正压力关系为：

$$F = \mu N \tag{1.28}$$

由（1.9），（1.6）得

地面对盘的支持力：

$$N=(m_1+m_2)g \tag{1.29}$$

（1.28）代入（1.29）得

地面对盘的摩擦力：

$$F=\mu(m_1+m_2)g$$ （1.30）（2 分）

（1.30）代入（1.10）得

圆盘角加速度：

$$\varepsilon=\frac{M_2-\mu(m_1+m_2)gR}{J_2}$$ （1.31）（2 分）

（1.5）代入（1.8），并考虑（1.30）得

圆盘盘心加速度：

$$a_O=\mu g \tag{1.32}$$

（1.5）（1.6）代入（1.7），并考虑（1.32），有：

$$-\mu m_1 gs\cos\beta+m_1 gs\sin\beta=0 \tag{1.33}$$

得

T 形杆倾角：

$$\tan\beta=\mu \tag{1.34}$$

即

$$\beta=\arctan(\mu)$$ （1.35）（2 分）

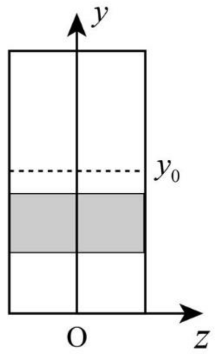
第 2 题 (30 分)

解答与评分标准

(1) （本小题 15 分）

解法一：

根据题意，选取底边中点为原点，建立 Oyz 坐标系如下图：



题解图 1

设中性轴在 $y=y_0$ 处，根据平面假定，BC 段横截面上正应变 ε 满足如下关系：

$$\varepsilon=-\frac{y-y_0}{\rho} \qquad (1.1) \qquad （3 分）$$

横截面相应的正应力沿 y 坐标的分布为：

$$\begin{cases} \sigma_1=E_1\varepsilon=-E_1\dfrac{y-y_0}{\rho},\ y\in[0,h_1) \\ \sigma_2=E_2\varepsilon=-E_2\dfrac{y-y_0}{\rho},\ y\in(h_1,h_1+h_2) \\ \sigma_3=E_3\varepsilon=-E_3\dfrac{y-y_0}{\rho},\ y\in(h_1+h_2,h_1+h_2+h_3] \end{cases} \qquad (1.2) \qquad （3 分）$$

由于纯弯段梁轴力为 0，故正应力沿 y 方向积分为 0，于是

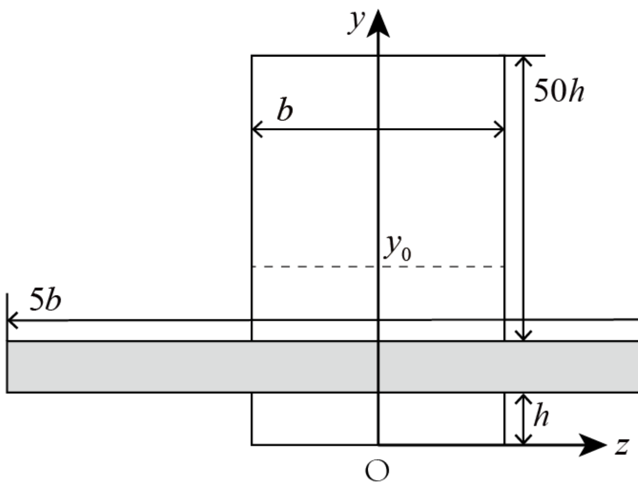
$$\int_0^{h_1}\sigma_1 dy+\int_{h_1}^{h_1+h_2}\sigma_2 dy+\int_{h_1+h_2}^{h_1+h_2+h_3}\sigma_3 dy=0 \qquad (1.3) \qquad （5 分）$$

根据 E_1=$E_3=E$ 、 $E_2=5E$ ，以及 $h_1=h_2=h$ 、 $h_3=50h$ ，代入式(1.3)后可得

$$y_0=24.25h \qquad (1.4) \qquad （4 分）$$

解法二

根据题意，选取底边中点为原点，建立 Oyz 坐标系；同时采用等效截面法，把 2 层材料的界面宽度放大 5 倍，如下图所示：



（5 分）

题解图 1

中性层的位置即为组合图形形心的 y 坐标

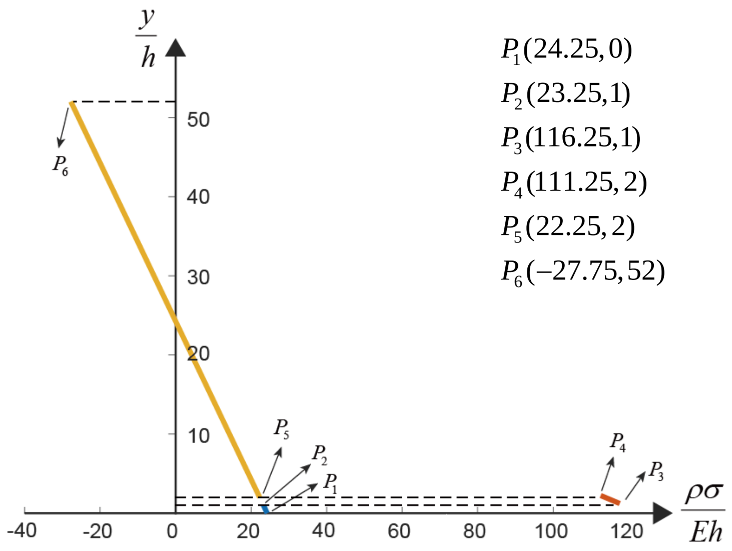
$$y_0=\frac{S_z}{A}=\frac{\sum_{i=1}^{3}A_i y_{ci}}{\sum_{i=1}^{3}A_i}=\frac{\frac{1}{2}h^2b+\frac{15}{2}h^2b+1350h^2b}{hb+5hb+50hb}=24.25h \qquad (1.5) \qquad （10 分）$$

(2) （本小题 15 分）

横截面上正应力的分布为：

$$\begin{cases}\sigma_1=-E\dfrac{y-24.25h}{\rho},\ y\in[0,h)\\ \sigma_2=-5E\dfrac{y-24.25h}{\rho},\ y\in(h,2h)\\ \sigma_3=-E\dfrac{y-24.25h}{\rho},\ y\in(2h,52h]\end{cases} \qquad (1.6) \qquad （5 分）$$

根据式(1.6)正应力分布如下图所示：



（4 分）

题解图 2

【应力分布图给分标准：在应力表达式(1.6)结果正确的情况下，应力分布图只要能画成三段，且第 1 段（层 1）和第 3 段（层 3）斜率一致，第 2 段（层 2）斜率是第 1、3 段的 5 倍，各段端点的坐标即使没有定量给出，也可得 4 分】

（3）（本小题 6 分）

根据横截面应力分布，2 层下部应力最大，最先发生开裂；开裂时此处的应力即材料强度极限：

$$\sigma_b = E\frac{116.25h}{\rho_{\mathrm{b}}} \qquad (1.7) \qquad （4 分）$$

其中 ρ_{b} 为此时中性轴处的曲率半径，$\rho_{\mathrm{b}} = \left(R + 27.75h\right)$。（2 分）

第二部分 提高题部分详细解答及评分标准（共 60 分）

第 3 题 (30 分)

解答与评分标准

（1）（本小题 3 分）系统自由度为：6。

（2）（本小题 17 分）该问题实际上是平面问题。因此，需要列出对 z 轴的动量矩。无外力和外力矩作用在系统上，系统的动量和动量矩守恒。根据动量守恒：

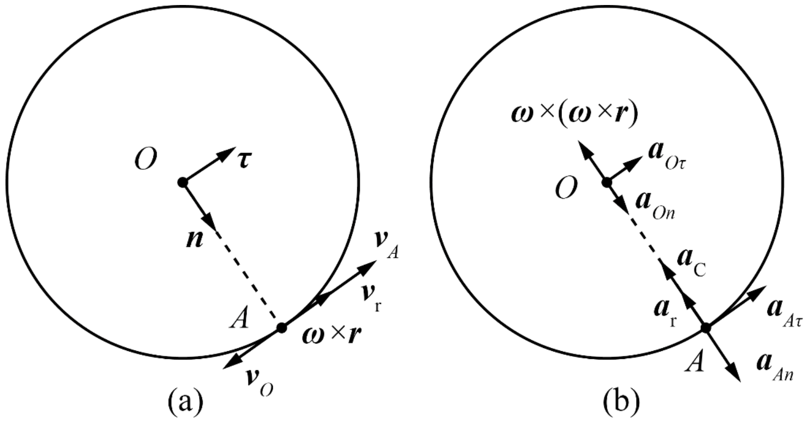
$$M\boldsymbol{v}_O + m\boldsymbol{v}_A = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v}_O = -\frac{2}{5}\boldsymbol{v}_A \quad (2.1)（1 分）$$

其中 $\boldsymbol{v}_O$ 为球心 O 的绝对速度；$\boldsymbol{v}_A$ 为质点 A 的绝对速度。

因此，根据质点 A 的速度合成，

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{v}_\mathrm{e} + \boldsymbol{v}_\mathrm{r} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_\mathrm{r} \Rightarrow \boldsymbol{v}_A = \frac{5}{7}\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} + \boldsymbol{v}_\mathrm{r}\right) \quad (2.2)（2 分）$$

质点 A 的速度合成关系如题解图 1（a）所示，记由 O 指向 A 为 $\boldsymbol{n}$ 方向，沿管道的切向为 $\boldsymbol{\tau}$ 方向。



题解图 1

则质点 A 的速度方向为 $\boldsymbol{\tau}$ 方向，其大小为：

$$v_A = \frac{5}{7}\left(\omega_z r + v_\mathrm{r}\right) \quad (2.3)（1 分）$$

代入对平面动点的动量矩，可得对球心 O 的动量矩：

$$H_z = J\omega_z + mv_A r = \left(J + \frac{5}{7}mr^2\right)\omega_z + \frac{5}{7}mv_\mathrm{r} r \qquad (2.4)（2 分）$$

则，由对球心 O 的动量矩定理得（外力矩为 0）：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t} = 0 + (M+m)\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{v}_O = 0 \qquad (2.5)（1 分）$$

其中 $\boldsymbol{v}_C$ 为系统质心的绝对速度；$\boldsymbol{v}_O$ 为球心 O 的绝对速度。

考察 z 轴分量，并将式（2.4）代入式（2.5）得：

$$\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow \dot{\omega}_z = 0 \Rightarrow \omega_z = 1 \qquad (2.6)（1 分）$$

【如果动量矩定理直接在这儿合并写的，与上面 1 分一起得 2 分】

公式（2.4）~（2.6）可以有不同的表达，考虑系统对质心的动量矩在 z 轴的投影：

$$H_{Cz} = J\omega_z + Mv_O r_{OC} + mv_A r_{AC} = \left(J + \frac{5}{7}mr^2\right)\omega_z + \frac{5}{7}mv_\mathrm{r} r \qquad (2.4^*)（2 分）$$

由对质心的动量矩定理得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}_C}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ 或 } \frac{\mathrm{d}H_{Cz}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (2.5^*)（1 分）$$

将式（2.4）代入式（2.5*）得：*

$$\dot{\omega}_z = 0 \text{ 即 } \omega_z = 1 \qquad (2.6^*)（1 分）$$

将式（2.6）代入式（2.2）、（2.1）得：

$$v_A = \frac{10}{7},\ v_O = \frac{4}{7} \qquad (2.7)（2 分）$$

其中质点 A 的速度方向为 $\boldsymbol{\tau}$ 方向，球心 O 与质点 A 的速度方向相反。

根据复合运动加速度合成，质点 A 的绝对加速度为：

$$\boldsymbol{a}_A = \boldsymbol{a}_\mathrm{e} + \boldsymbol{a}_\mathrm{r} + \boldsymbol{a}_\mathrm{k} \qquad (2.8)（1 分）$$

从前面分析可知：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=0 \qquad (2.9)（1分）$$

从系统动量守恒可得：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(M\boldsymbol{v}_O+m\boldsymbol{v}_A\right)=0 \Rightarrow \boldsymbol{a}_O=-\frac{2}{5}\boldsymbol{a}_A \qquad (2.10)（1分）$$

其中$\boldsymbol{v}_O$为球心 O 的绝对速度，$\boldsymbol{a}_O$为球心 O 的绝对加速度，$\boldsymbol{a}_A$为质点 A 的绝对加速度。设质点 A 的绝对加速度为$\boldsymbol{a}_A=a_{An}\boldsymbol{n}+a_{A\tau}\boldsymbol{\tau}$。则由题解图 1（b）得$\boldsymbol{n}$方向和$\boldsymbol{\tau}$方向的加速度关系分别为：

$$a_{A\tau}=a_{O\tau} \qquad (2.11)（1分）$$

$$a_{An}=a_{On}-\omega^2 r-\frac{v_{\mathrm{r}}^2}{r}-2\omega v_{\mathrm{r}} \qquad (2.12)（2分）$$

由式（2.10)、（2.11）和（2.12）解得：

$$\boldsymbol{a}_A=-\frac{20}{7}\boldsymbol{n} \qquad (2.13)（1分）$$

【没指出方向不得分。】

（3）（本小题 10 分）建立另一个动系 $O\ x'y'z'$，使其 x'轴总是在质点 A 上，z'轴与固连系的 z 轴一致。设 $Ox'y'z'$三个轴的单位矢量分别为$\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$。

则系统对球心 O 的动量矩为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}&=\mathrm{diag}\left(J,J,J\right)\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{r}\times m\boldsymbol{v}_A\\&=J\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{r}\times m\left(\boldsymbol{v}_O+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+v_{\mathrm{r}}\boldsymbol{e}_2\right)\\&=J\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{r}\times\frac{5}{7}m\left(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}+v_{\mathrm{r}}\boldsymbol{e}_2\right)\end{aligned} \qquad (2.14)（2分）$$

设球体角速度为$\boldsymbol{\omega}=\omega_1\boldsymbol{e}_1+\omega_2\boldsymbol{e}_2+\omega_3\boldsymbol{e}_3$，质点 A 的位置矢量$\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_1$，则系统对球心 O 的动量矩可化简为：

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H} &= J\boldsymbol{\omega}+r\boldsymbol{e}_1\times\frac{5}{7}m\left(\boldsymbol{\omega}\times r\boldsymbol{e}_1+v_{\mathrm{r}}\boldsymbol{e}_2\right)\\ &= J\omega_1\boldsymbol{e}_1+\left(J+\frac{5}{7}mr^2\right)\omega_2\boldsymbol{e}_2+\left[\left(J+\frac{5}{7}mr^2\right)\omega_3+\frac{5}{7}mv_{\mathrm{r}}r\right]\boldsymbol{e}_3\end{aligned}\qquad(2.15)(1\text{ 分})$$

由对球心 O 的动量矩定理：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=0+\left(M+m\right)\boldsymbol{v}_C\times\boldsymbol{v}_O=0\qquad(2.16)(1\text{ 分})$$

其中系统质心绝对速度 $\boldsymbol{v}_C=0$。

记相对导数 $\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\dot{\omega}_1\boldsymbol{e}_1+\dot{\omega}_2\boldsymbol{e}_2+\dot{\omega}_3\boldsymbol{e}_3$，由角速度合成可知，动系 $O\,x'y'z'$的角速度为

$\boldsymbol{\omega}+\frac{v_{\mathrm{r}}}{r}\boldsymbol{e}_3$。于是：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}+\left(\boldsymbol{\omega}+\frac{v_{\mathrm{r}}}{r}\boldsymbol{e}_3\right)\times\boldsymbol{H}\qquad(2.17)(1\text{ 分})$$

将式（2.15）代入式（2.17），并代入数值 $J=1,m=1,r=1,v_{\mathrm{r}}=1$，可得：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{H}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{7}\left[7\dot{\omega}_1\boldsymbol{e}_1+12\dot{\omega}_2\boldsymbol{e}_2+12\dot{\omega}_3\boldsymbol{e}_3+\left(-7\omega_2\boldsymbol{e}_1-\left(5\omega_1\omega_3-2\omega_1\right)\boldsymbol{e}_2+5\omega_1\omega_2\boldsymbol{e}_3\right)\right]\qquad(2.18)(1\text{ 分})$$

根据式（2.16)、(2.18）可得角速度满足的微分方程：

$$\begin{cases}\dot{\omega}_1=\omega_2\\ \dot{\omega}_2=\dfrac{1}{12}\left(5\omega_1\omega_3-2\omega_1\right)\\ \dot{\omega}_3=-\dfrac{5}{12}\omega_1\omega_2\end{cases}\qquad(2.19)(1\text{ 分})$$

考虑到初始条件，可得微分方程的解为：

$$\begin{cases}\omega_1=1\\ \omega_2=0\\ \omega_3=0.4\end{cases}\qquad(2.20)(1\text{ 分})$$

也就是得到了球体的角速度。

根据角加速度定义及绝对导数和相对导数关系，有：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\tilde{\mathrm{d}}\boldsymbol{\omega}}{\mathrm{d}t}+\left(\boldsymbol{\omega}+\frac{v_{\mathrm{r}}}{r}\boldsymbol{e}_3\right)\times\boldsymbol{\omega}$$ （2.21）（1 分）

将式（2.20）代入式（2.21）得：

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\left(\dot{\omega}_1-\omega_2\right)\boldsymbol{e}_1+\left(\dot{\omega}_2+\omega_1\right)\boldsymbol{e}_2+\dot{\omega}_3\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_2$$ （2.22）（1 分）

得到了球体的角加速度。

【如果用不同方式得到了这个结果，第（3）问 10 分可以全得。没有代入数值不扣分】

第 4 题 (20 分)

解答与评分标准

（1）（本小题 3 分）

考虑变形后截面 C'处的受力情况，此时轴力与 $A'C'$ 段的重力相平衡，故

$$F=\rho\pi R^2 xg \qquad (2.1) \qquad （3 分）$$

（2）（本小题 10 分）

根据材料不可压缩假设可知，变形前后的体积不变，即：$\pi r^2 l=\pi R^2 L$，由此可得：

$$\frac{r^2}{R^2}\frac{l}{L}=1, \qquad (2.2)$$

（3 分）再由 $\lambda_r=\dfrac{r}{R}$，$\lambda=\dfrac{l}{L}$，可得：

$$\lambda\cdot\lambda_r^2=1. \qquad (2.3) \qquad （2 分）$$

根据轴力和变形关系：$F=\pi r^2 G\left(\lambda^2-\lambda_r^2\right)$，其中 $\lambda_r=\dfrac{r}{R}$；再由 $\lambda\cdot\lambda_r^2=1$，可得：

$$F=\pi r^2 G\left(\left(\frac{R}{r}\right)^4-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \qquad (2.4) \qquad （3 分）$$

结合式(2.1)和式(2.4)可得到 r 随 x 的变化关系

$$\left(\frac{r}{R}\right)^6+\frac{\rho xg}{G}\left(\frac{r}{R}\right)^2-1=0 \qquad (2.5) \qquad （2 分）$$

（3）（本小题 7 分）

由材料不可压缩性可知，变形前后的体积不变。注意到由于悬挂后底部 A' 面不受力，因此该截面的半径仍为 R，根据变形后 $A'C'$ 段圆台与变形前 AC 段圆柱体积相等，可得

$$\pi R^2 x=\frac{1}{3}\pi x'\left(R^2+r^2+Rr\right) \qquad (2.6) \qquad （2 分）$$

由 $\lambda_r=r/R$， (2.6)式可改写为

$$x=\frac{1}{3}x'\left(1+\lambda_r{}^2+\lambda_r\right) \qquad (2.7)$$

由式(2.7)可求得

$$\lambda_r = \sqrt{\frac{3x}{x'} - \frac{3}{4}} - \frac{1}{2} \qquad (2.8) \qquad （2 分）$$

由于x和$x^{'}$已知，将(2.8)代入(2.5)式【注意到$\lambda_r = r/R$】，即可求得G：

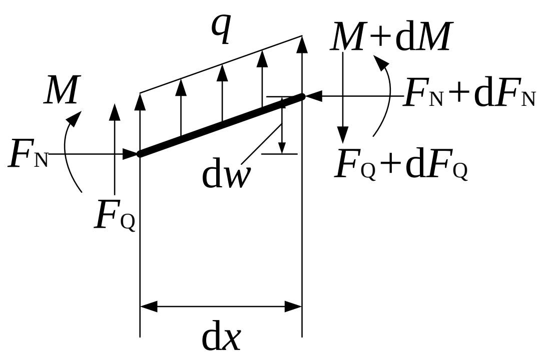
$$G = x\rho g\left(\lambda_r^{-2} - \lambda_r^4\right)^{-1} \qquad (2.9) \qquad （3 分）$$

第 5 题 (10 分)

解答与评分标准

（1）（本小题 3 分）

设梁的挠度为 w，截面上弯矩 M，轴力 F_{N}，剪力 F_Q 和分布力 q；考察梁上微元的受力：



题解图 1

根据平衡条件，我们有

轴向力平衡：$F_N-\left(F_N+\mathrm{d}F_N\right)=0$

切向力平衡：$F_Q+q\mathrm{d}x=F_Q+\mathrm{d}F_Q$

弯矩平衡：$M+\mathrm{d}M+\left(F_N+\mathrm{d}F_N\right)\mathrm{d}w+\frac{1}{2}q\left(\mathrm{d}x\right)^2-\left(F_Q+\mathrm{d}F_Q\right)\mathrm{d}x-M=0$

简化得到

$$\begin{cases}\mathrm{d}F_N=0\\ \mathrm{d}F_Q=q\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}M+F_N\mathrm{d}w=F_Q\mathrm{d}x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}F_N=F\\ \dfrac{\mathrm{d}F_Q}{\mathrm{d}x}=q\\ \dfrac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}+F_N\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}=F_Q\end{cases}\qquad(3.1)$$ （1 分）

由于分布力是由地基等效弹簧的变形引起的，根据题意有：

$q=-2Kw$ (3.2) （1 分）

将式(3.2)代入式(3.1)，同时根据梁的小挠度微分方程 $M=EI\dfrac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}x^2}$，得到平衡微分方程：

$$EI\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4}+F\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}+2Kw=0 \qquad (3.3) \qquad （1 分）$$

【给分标准：若根据其他解法，可正确求得式(3.3)，也可得 3 分】

（2）（本小题 7 分）

解法一：

将位移模式 $w=A\sin\frac{2\pi}{\lambda}x$ 代入式(3.3)平衡微分方程得到

$$EI\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^4-F\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2+2K=0 \qquad (3.4) \qquad （4 分）$$

临界失稳条件为：$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$ (3.5) （1 分）

据此求得临界载荷：$F_{\mathrm{cr}}=\sqrt{8EIK}$ (3.6) （1 分）

及临界失稳波长：$\lambda_{\mathrm{cr}}=2\pi\left(\frac{EI}{2K}\right)^{\frac{1}{4}}$ (3.7) （1 分）

解法二：

考虑失稳模式下一个波长 λ 内的能量增量，其中梁弯曲应变能增量：

$$\Delta U_1=\int_0^\lambda \frac{M^2}{2EI}\mathrm{d}x=\frac{EI}{2}\int_0^\lambda\left(\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{4\pi^4A^2EI}{\lambda^3} \qquad (3.8) \qquad （1 分）$$

地基弹簧势能增量：$\Delta U_2=2\cdot\frac{K}{2}\int_0^\lambda w^2\mathrm{d}x=\frac{\lambda KA^2}{2}$ (3.9) （1 分）

外力势能增量：$\Delta U_{外}=-F\cdot\frac{1}{2}\int_0^\lambda\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}\right)^2\mathrm{d}x=-\frac{\pi^2A^2F}{\lambda}$ (3.10) （1 分）

失稳发生时：$\Delta U_1+\Delta U_2+\Delta U_{外}=0$，即

$$\frac{K}{2}\lambda^4-\pi^2F\lambda^2+4\pi^4EI=0 \qquad (3.11) \qquad （1 分）$$

根据临界失稳条件：$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$ (3.12) （1 分）

可得临界载荷 $F_c=\sqrt{8EIK}$ (3.13) （1 分）

以及临界失稳波长 $\lambda_c=2\pi\left(\frac{EI}{2K}\right)^{\frac{1}{4}}$ (3.14) （1 分）