全国周培源大学生力学竞赛

第十一届全国周培源大学生力学竞赛(个人赛)试题答案

出题学校:湖南大学

本试卷分为基础题和提高题两部分 满分 120 分 时间 3 小时 30 分

说明:个人赛奖项分为全国奖和赛区奖. 全国奖先以提高题得分为筛选标准,再按总得分排名,根据名次最终确定获奖人;赛区奖直接按赛区内总成绩排名确定获奖人. 全国奖获奖人不再重复获得赛区奖.

注意:答卷中各题所得的最后计算结果用分数表示或用小数表示均可.

基础题部分 (填空题,共 60 分)

一、(6 分) 如图 1 所示,正方体边长为 c,其上作用四个力 $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2, \boldsymbol{F}_3, \boldsymbol{F}_4$,各力大小之间的关系为 $F_1 = F_2 = F_a$,$F_3 = F_4 = F_b$. 试计算以下问题,并将结果填在相应的空内.

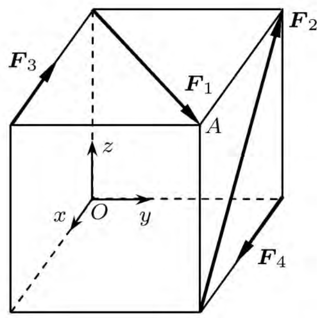


图 1

(1) (2 分) 力系对 OA 轴之矩的大小为 $\dfrac{\sqrt{6}}{6}F_a c - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}F_b c$;

(2) (2 分) 若此力系可简化为一个力,则 F_a 与 F_b 的数量关系为 $F_b = \dfrac{\sqrt{2}}{4}F_a$;

(3) (2 分) 若 $F_a = F_b = F$,力系简化为一力螺旋,则其中的力偶矩为 $\dfrac{1-2\sqrt{2}}{2}Fc$.

解答:

向点 O 简化

$$F_x = 0,\ F_y = \frac{\sqrt{2}}{2}F_a,\ F_z = \frac{\sqrt{2}}{2}F_a;$$

$$M_x = 0,\ M_y = -F_b c,\ M_z = \frac{\sqrt{2}}{2}F_a c - F_b c.$$

问题 (1):$M_{OA} = \boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{e}_{OA} = \dfrac{\sqrt{6}}{6}F_a c - \dfrac{2\sqrt{3}}{3}F_b c$;

问题 (2):$\boldsymbol{M}_O \cdot \boldsymbol{F}_R = 0 \Rightarrow F_b = \dfrac{\sqrt{2}}{4}F_a$;

问题 (3):$M_{\min} = M_O \cdot e_{F_R} = \dfrac{1-2\sqrt{2}}{2}Fc$.

二、(6 分) 如图 2 所示,两匀质轮 A 和 B 的质量同为 m,半径同为 r. 轮 A 位于水平面上,绕于轮 B 的细绳通过定滑轮 C 后与轮 A 的中心相连,其中 CA 段绳水平,CB 段绳铅直. 不计定滑轮 C 与细绳的质量,且设细绳不可伸长. 系统处于铅垂平面内,自静止释放. 试计算以下问题,并将结果填在相应的空内. (重力加速度用 g 表示)

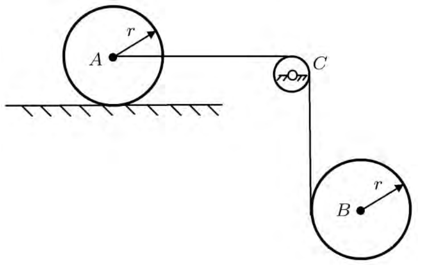


图 2

(1) (2 分) 若轮 A 既滚又滑,则系统的自由度数为 (3);

(2) (4 分) 若轮 A 与水平支承面光滑接触,轮 B 下落的高度与时间的关系为 $\dfrac{3}{8}gt^2$.

本文于 2017–08–01 收到.

解答:

问题 (1)：3 自由度.

问题 (2)：轮 A 平动. 分析轮 B，动静法求解：

$$F_T = ma_A$$

$$\sum M_B = 0,\quad F_T r - J\alpha = 0$$

$$ma_A r - \frac{1}{2}mr^2\alpha = 0 \Rightarrow a_A = \frac{1}{2}r\alpha$$

$$\sum M_D = 0,\quad m(a_A + r\alpha)r + J\alpha - mgr = 0$$

$$\Rightarrow a_A = \frac{g}{4}$$

$$\Rightarrow a_B = a_A + r\alpha = \frac{3g}{4}$$

$$\Rightarrow h_B = \frac{1}{2}a_B t^2 = \frac{3}{8}gt^2$$

以上结果或通过求解刚体平面运动微分方程得到.

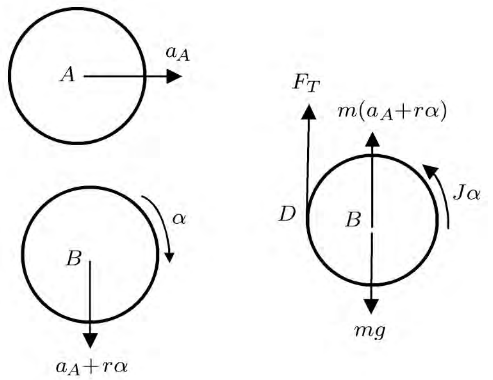


图 3

三、 (6 分) 桁架的杆件内力可以应用节点法、截面法以及虚位移原理进行求解. 如图 4 所示，静定平面桁架由水平杆、竖直杆和 45° 斜杆组成，在 B 处受固定铰支座约束，A, C 两处由可水平运动的铰支座支承. 桁架上作用了 3 个大小同为 F 的载荷，试计算以下问题，并将结果填在相应的空内.

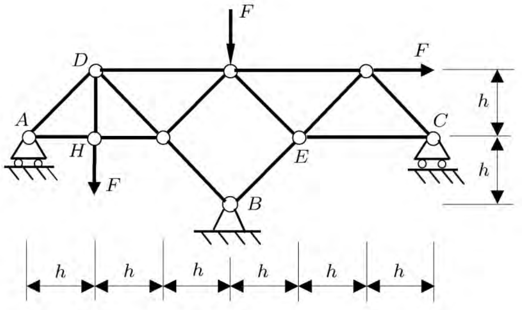


图 4

(1) (2 分) 杆 DH 的内力为 F (受拉)；

(2) (4 分) 杆 BE 的内力为 $3\sqrt{2}F/2$ (受压).

解答:

问题 (1)：对节点 H，依节点法，有

$$F_{DH} = F \text{ (受拉)}$$

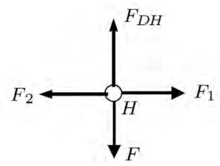


图 5

问题 (2)：

解法 1—— 应用虚位移原理求解

$$-(Fh + 3Fh)\delta\theta_1 + \left(F_{BE}\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2h + Fh\right)\delta\theta_2 = 0$$

$$\delta\theta_1 = \delta\theta_2$$

$$F_{BE} = \frac{3\sqrt{2}}{2}F \text{ (受压)}$$

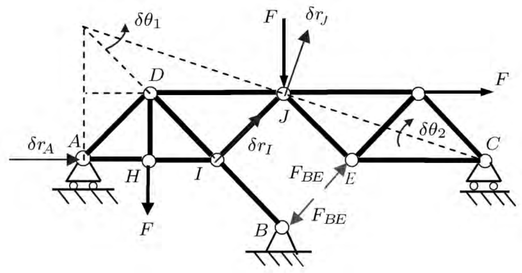


图 6

解法 2—— 几何静力学方法，需要列多个平衡方程，下面列举其中一种解法.

取整体

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow F_C - F_A = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow F_{Bx} - F = 0 \tag{2}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow F_{By} + F_A + F_C - 2F = 0 \tag{3}$$

取最右边三角形构成的局部

$$\sum M_J = 0 \Rightarrow \sqrt{2}F_{BE}h + F_C\cdot 3h = 0 \tag{4}$$

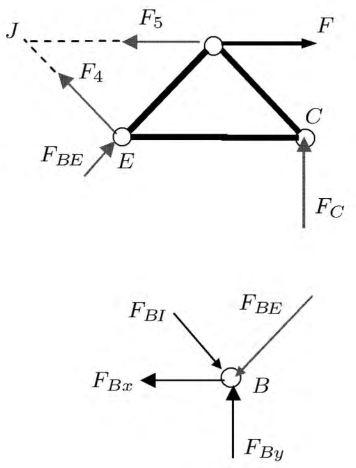


图 7

最后取节点 B

$$\sum F_X = 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}F_{BE} + \frac{\sqrt{2}}{2}F_{BI} - F_{Bx} = 0 \tag{5}$$

$$\sum F_Y = 0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}F_{BE} - \frac{\sqrt{2}}{2}F_{BI} + F_{By} = 0 \tag{6}$$

$$F_{BE} = \frac{3\sqrt{2}}{2}F\ (受压)$$

四、(6 分) 如图 8 所示，小车上斜靠着长为 l、质量为 m 的均质杆 AB，其倾角以 θ 表示. 杆处于铅垂平面内，B 端与小车壁光滑接触，A 端与小车底板的摩擦角为 $\varphi_m = 30°$. 小车由动力装置驱动 (图中未画出)，沿水平直线轨道向左运动，且其运动可以被控制. 小车运动过程中，杆 AB 相对于小车始终保持静止，试计算以下问题，并将结果填在相应的空内.

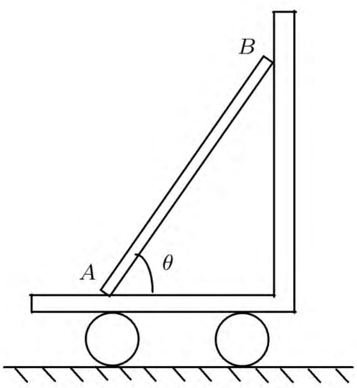


图 8

(1) (3 分) 若小车作匀速运动，则倾角 θ 要满足的条件为 $\tan^{-1}(\sqrt{3}/2) \leqslant \theta < 90°$；

(2) (3 分) 若小车作加速度向右的减速运动，则小车加速度 a 与倾角 θ 应满足的关系为: 若 $\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \leqslant \theta < 60°$，则 $a \leqslant g\left(2\sqrt{3}/3 - \cot\theta\right)$；若 $60° \leqslant \theta < 90°$，则 $a \leqslant g\cot\theta$.

解答:

问题 (1)：

几何法求解：

$$因为\ \frac{l}{2}\cos\theta = l\sin\theta \cdot \tan\varphi_m$$

$$\Rightarrow \theta_0 = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\cot\varphi_m\right)$$

$$所以\ \tan^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right) \leqslant \theta < 90°$$

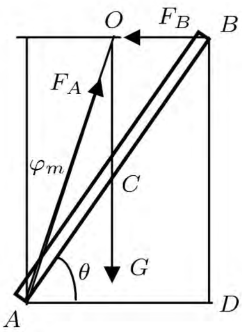


图 9

解析法求解：

平衡方程

$$\begin{cases} F_{AS} - F_B = 0 \\ F_{AN} - G = 0 \\ F_B l\sin\theta - \dfrac{Gl}{2}\cos\theta = 0 \end{cases}$$

结合物理方程

$$\frac{F_{AS}}{F_{AN}} \leqslant \tan\varphi_m$$

可得结果.

问题 (2)：

几何法求解：

当 $\theta_0 = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}/2\right) \leqslant \theta < 60°$

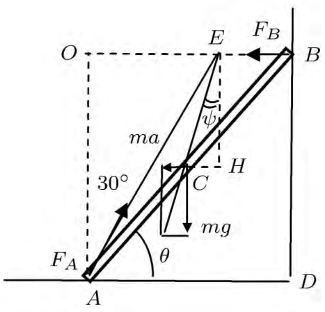


图 10

加速度 a 的上限由 A 点临界滑动确定

$$\tan\psi=\frac{CH}{EH}=\frac{OE-OB/2}{BD/2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\cot\theta$$

所以 $a_{\max}=g\tan\psi=g\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}-\cot\theta\right)$

当 $\theta\geqslant 60^\circ$ 时，加速度 a 的上限由杆绕 A 点翻转确定，所以 $a_{\max}=g\cot\theta$. 以上过程也可以采用解析法求解.

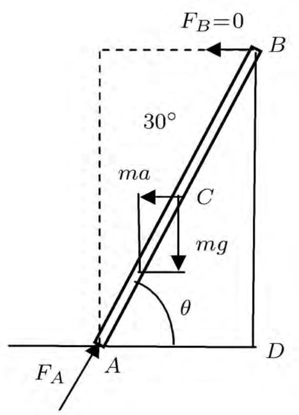


图 11

五、(6 分) 如图 12 所示，圆形细环管在相连部件 (图中未画出) 带动下沿水平直线轨道纯滚动，管内有一小壁虎，相对于环管爬行，壁虎可被视为一点，在图中以小球 B 代替. 图示瞬时，壁虎与环管的中心处于同一水平线上，壁虎相对环管的速率为 u，相对速度的方向朝下，相对速度大小的改变率等于 0，环管中心 O 点的速度向右，速度大小也为 u，加速度为 0. 环管中心圆的半径等于 R. 试计算以下问题，并将结果填在相应的空内.

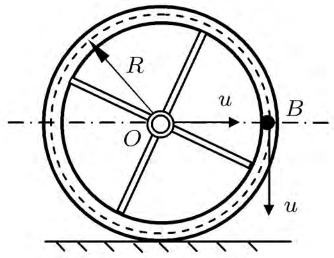


图 12

(1) (2 分) 在此瞬时壁虎相对地面的速度大小为 $\sqrt{5}u$；

(2) (2 分) 在此瞬时壁虎相对地面的加速度大小为 $4u^2/R$；

(3) (2 分) 在此瞬时壁虎在相对地面的运动轨迹上所处位置点的曲率半径为 $5\sqrt{5}R/8$.

解答:

动点: 小球；动系: 细圆环

$$\boldsymbol{v}_B=\boldsymbol{v}_e+\boldsymbol{v}_r$$

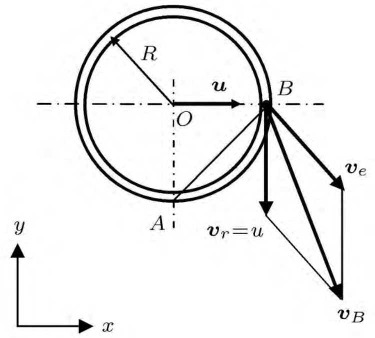


图 13

则

$$v=\sqrt{5}u$$

$$v_{Bx}=v_e\cos 45^\circ=u$$

$$v_{By}=-2u$$

$$\boldsymbol{\tau}_B=\frac{\boldsymbol{v}_B}{v_B}=\frac{\sqrt{5}}{5}\boldsymbol{i}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\boldsymbol{j}$$

$\boldsymbol{a}_B=\boldsymbol{a}_e+\boldsymbol{a}_r+\boldsymbol{a}_C$, 为小球绝对加速度

$$a_e=\frac{u^2}{R}\,,\ a_r=\frac{u^2}{R}\,,\ a_C=2\frac{u^2}{R}$$

$$a_B=a_e+a_r+a_C=-4\frac{u^2}{R}$$

$$\boldsymbol{a}_B=-4\frac{u^2}{R}\boldsymbol{i}$$

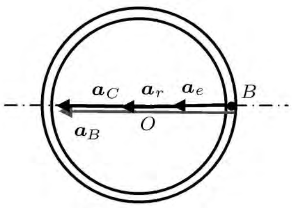


图 14

$a_B^\tau = \boldsymbol{a}_B \cdot \boldsymbol{\tau}_B = -\dfrac{4\sqrt{5}}{5}\dfrac{u^2}{R}$，为绝对运动的切向加速度，与绝对速度的夹角大于 90°，$a_B^n = \sqrt{a_B^2 - (a_B^\tau)^2} = \dfrac{8\sqrt{5}}{5}\dfrac{u^2}{R}$，为绝对运动的法向加速度，曲率半径 $\rho = \dfrac{v^2}{a_B^n} = \dfrac{5\sqrt{5}}{8}R$.

六、(5 分) 图 15 所示结构中，铅垂杆①和斜杆②均为弹性杆，斜杆②与水平线夹角为 θ，直角三角形 ABC_2 为刚体，边 BC_2 处于水平位置. 现将 C_1 和 C_2 联结在一起，已知 a, δ 和 θ，则求该两杆轴力用到的

(1) (2 分) 平衡方程 (杆①、杆②的轴力分别用 $F_{\rm N1}$ 和 $F_{\rm N2}$ 表示) 为 $2F_{\rm N1} - F_{\rm N2}\cos\theta = 0$；

(2) (3 分) 变形条件方程 (杆①、杆②的变形分别用 Δl_1 和 Δl_2 表示) 为 $\Delta l_1 + 2\Delta l_2/\cos\theta = \delta$.

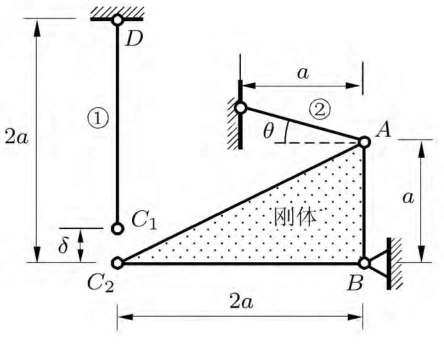
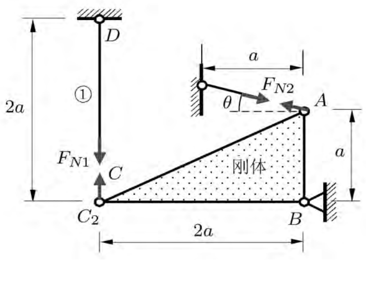


图 15

解答：(1) 以三角形刚体为研究对象，$\sum m_B = 0 \Rightarrow 2F_{\rm N1} - F_{\rm N2}\cos\theta = 0$.



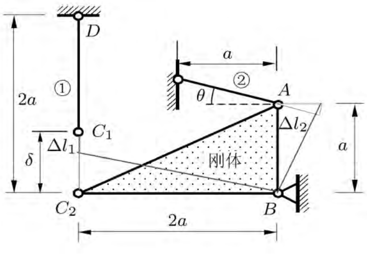


图 16

(2) 设三角形刚体绕 B 点转动小角 φ，

$$\because \ \Delta l_2/\cos\theta = a\varphi\delta - \Delta l_1 = 2a\varphi$$

$$\therefore \ \Delta l_1 + 2\Delta l_2/\cos\theta = \delta$$

七、(5 分) 一种能量收集装置，可简化为图 17 所示悬臂梁模型. 梁 AB 长 l，弯曲刚度为 $2EI$；梁 BC 和 BD 长均为 l，弯曲刚度均为 EI. 梁 AB 与梁 BC 和 BD 通过刚节点 B 连接，三梁均处于水平位置. 梁和刚节点 B 的重量均不计. 梁 BC 和 BD 端部固定有重量均为 W 的物块，该两梁之间有小间隙. 则梁端 D 的挠度与物块重量之比 $f_D/W = 8l^3/(3EI)$.

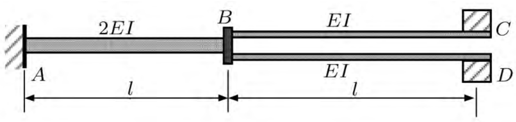


图 17

解答

$$f_D = f_B + \theta_B l + f_D'$$

其中

$$f_B = \frac{(2W)l^3}{3(2EI)} + \frac{(2Wl)l^2}{2(2EI)} = \frac{Wl^3}{6EI}$$

$$\theta_B = \frac{(2W)l^2}{2(2EI)} + \frac{(2Wl)l}{(2EI)} = \frac{3Wl^2}{2EI}$$

$$f_D' = \frac{Wl^3}{3EI}$$

八、(6 分) 已知一危险点的单元体处于平面应力状态，最大切应变 $\gamma_{\max} = 5\times10^{-4}$，通过该点相互垂直的微截面上正应力之和为 28 MPa. 若材料的弹性模量 $E = 200\,\rm GPa$，泊松比 $\nu = 0.25$. 则

(1) (3 分) 该点主应力 $\sigma_1 = 54\,\rm MPa$，$\sigma_2 = 0\,\rm MPa$，$\sigma_3 = -26\,\rm MPa$；

(2) (3 分) 用最大切应力强度理论校核时相当应力 $\sigma_{r3} = 80\,\rm MPa$.

解答： $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)} = 80\,\mathrm{GPa}$, $\sigma_z = 0$；

所以 $\sigma_x - \sigma_y = 2\times 5\times 10^4 \times 0.8\times 10^5 = 80\,\mathrm{MPa}$，又 $\sigma_x + \sigma_y = 28\,\mathrm{MPa}$，解得：$\sigma_1 = 54\,\mathrm{MPa}$，$\sigma_2 = 0$，$\sigma_3 = -26\,\mathrm{MPa}$；于是 $\tau_{\max} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 40\,\mathrm{MPa}$，$\sigma_{r3} = 2\tau_{\max} = 80\,\mathrm{MPa}$.

九、(6 分) 图 18 所示刚架中，水平梁为刚杆，竖直杆①、②均为细长弹性杆，只考虑与纸面平行的平面内的失稳. 则

(1) (2 分) 刚架失稳时载荷的最小值 F 由杆①决定；(注：填入①，②)

(2) (4 分) 刚架失稳时载荷的最小值 $F = \pi^2 EI/(2l^2)$.

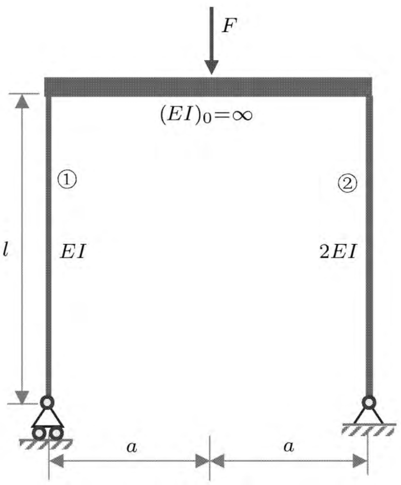


图 18

解答： 最低临界载荷对应两竖杆均朝一边变形，在该变形情况下柱内无剪力，相当于悬臂柱，于是有

$$F = \frac{\pi^2 EI}{2l^2}$$

十、(8 分) 图 19 所示等截面直角刚架 ACB，杆件横截面为圆形，弯曲刚度为 EI，扭转刚度为 $0.8EI$. C 处承受大小为 m、方向如图所示的外力偶，该力偶矢量方向与刚架轴线处于同一平面内. 则

(1) (4 分) 截面 A 的弯矩 $M = \dfrac{5\sqrt{2}}{18}m$；

(2) (4 分) 截面 B 的扭矩 $T = \dfrac{2\sqrt{2}}{9}m$ 或 $-\dfrac{2\sqrt{2}}{9}m$.

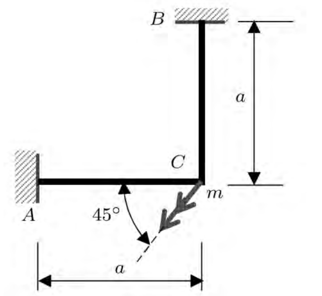


图 19

解答：

$$\begin{aligned}
&\Theta_{CC} = \int_0^a \frac{M_1\overline{M_1}}{EI}\mathrm{d}x + \int_0^a \frac{T_1\overline{T_1}}{GI_p}\mathrm{d}x + \\
&\int_0^a \frac{M_2\overline{M_2}}{EI}\mathrm{d}y + \int_0^a \frac{T_2\overline{T_2}}{GI_p}\mathrm{d}y = \\
&\frac{1}{EI}\int_0^a \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{m}{2\sqrt{2}} + \frac{X}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}x + \right.\\
&\left.\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{m}{2\sqrt{2}} + \frac{X}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}y\right] + \\
&\frac{1}{GI_p}\int_0^a \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{m}{2\sqrt{2}} + \frac{X}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}x - \right.\\
&\left.\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{m}{2\sqrt{2}} - \frac{X}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}y\right] = 0
\end{aligned}$$

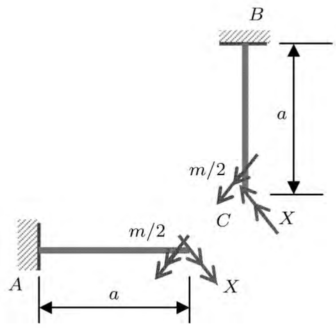


图 20

求解，得

$$X = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\dfrac{1}{EI} - \dfrac{1}{GI_p}}{\dfrac{1}{EI} + \dfrac{1}{GI_p}}m = \frac{m}{18}$$

$$M = \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4}m = \frac{5\sqrt{2}}{18}m$$

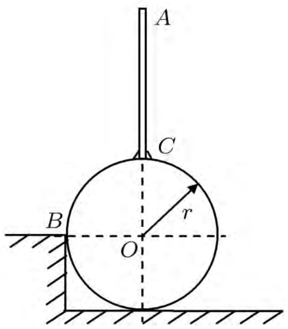
$$T = \frac{\sqrt{2}}{4}m - \frac{X}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{9}m$$

或

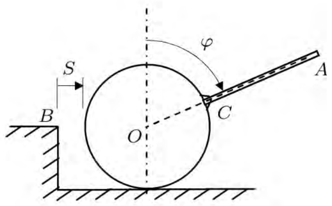
$$T = -\frac{\sqrt{2}}{4}m + \frac{X}{\sqrt{2}} = -\frac{2\sqrt{2}}{9}m$$

提高题部分 (计算题，共 60 分)

十一、(共 15 分) 如题图 21(a) 所示，质量均为 m 的圆轮和细直杆 AC 固结成一组合刚体. 其中，杆 AC 沿圆轮径向，O 为圆轮轮心，C 点为轮与杆的固结点，也是组合刚体的质心. 初始时刻，组合刚体静止于水平面，左边紧靠高度为 r 的水平台阶，然后，在图示不稳定平衡位置受微小扰动后向右倾倒，以 φ 表示组合刚体在杆端 A 与地面接触之前的转动角度 (参见图 21(b)). 圆轮，半径为 r，组合刚体关于过轮心 O 并垂直于圆轮的轴之转动惯量为 J_O. 略去各处摩擦，试求解如下问题.



(a)



(b)

图 21

(1) (5 分) 圆轮与台阶 B 点开始分离时的角度 φ 的大小？

(2) (6 分) 组合刚体的角速度与角度 φ 的关系？

(3) (4 分) 圆轮右移的距离 S 与角度 φ 的关系？

解答:

组合刚体的运动存在两个阶段，一是绕 O 的定轴转动；二是质心水平速度保持不变的平面运动. 首先确定由定轴转动到平面运动的临界转角. 问题 (1), 刚体绕 O 作定轴转动. 依动能定理

$$\frac{1}{2}J_O\omega^2 = 2mgr(1-\cos\varphi)\ \ (1\ 分) \tag{7}$$

$$\omega^2 = \frac{4mgr}{J_O}(1-\cos\varphi)$$

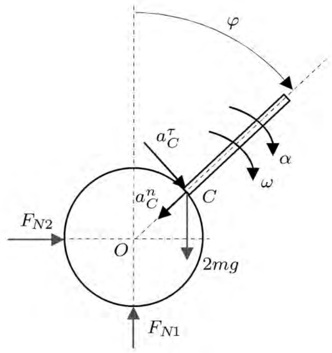


图 22

式 (7) 两边对时间求导

$$\alpha = \frac{2mgr}{J_O}\sin\varphi\ \ (1\ 分) \tag{8}$$

式 (7) 也可由对点 O 的动量矩定理得到.

由质心运动定理

$$F_{N2} = 2m\left(-a_C^n\sin\varphi + a_C^\tau\cos\varphi\right) \tag{9}$$

$a_C^n = r\omega^2$, $a_C^\tau = r\alpha$. 方程 (9) 也可由动静法得到. 式 (9) 中代入加速度

$$F_{N2} = \frac{4m^2r^2g}{J_O}\sin\varphi(3\cos\varphi - 2) \qquad (2分)$$

球与凸台分离的角度由 $F_{N2}=0$ 确定.

$$\varphi_0 = \cos^{-1}\frac{2}{3}\quad (1\ 分)$$

对应角速度 $\omega_0 = 2\sqrt{\dfrac{mgr}{3J_O}}$.

问题 (2):

当 $\varphi \leqslant \varphi_0$, $\omega = 2\sqrt{\dfrac{mgr}{J_O}(1-\cos\varphi)}$ (1 分)

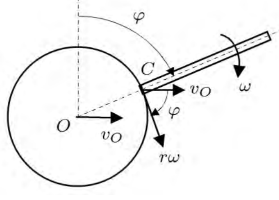


图 23

当 $\varphi > \varphi_0$ 时，组合刚体与台阶脱离接触，作平面运动，水平方向动量守恒，质心 C 的水平速度不变，为

$$v_{Cx0} = r\omega_0\cos\varphi_0 = \frac{4r}{3}\sqrt{\frac{mgr}{3J_O}}$$

O 点速度 v_O 水平，以其为基点，质心 C 的速度表示为

$$\boldsymbol{v}_C = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}_{CO} \qquad (1\text{ 分})$$

质心 C 的水平速度为

$$v_{Cx} = v_O + r\omega\cos\varphi = r\omega_0\cos\varphi_0 \qquad (1\text{ 分}) \qquad (10)$$

依动能定理，有

$$\frac{1}{2}J_C\omega^2 + \frac{1}{2}\times 2m\times\left[(v_{Cx0})^2 + (r\omega\sin\varphi)^2\right] = 2mgr(1-\cos\varphi) \qquad (2\text{ 分}) \qquad (11)$$

其中，$J_C = J_O - 2mr^2$.

由式 (11) 解出

$$\omega = \sqrt{\frac{4mgr(1-\cos\varphi) - 2mr^2\omega_0^2\cos^2\varphi_0}{J_O - 2mr^2\cos^2\varphi}} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{9mgr(1-\cos\varphi) - 2mr^2\omega_0^2}{J_O - 2mr^2\cos^2\varphi}}$$

(当 $\varphi > \varphi_0$)　　(1 分)

其中，$\omega_0 = 2\sqrt{\dfrac{mgr}{3J_O}}$, $\varphi_0 = \cos^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

问题 (3):

当 $\varphi \leqslant \varphi_0$ 时，$S = 0$　(1 分)

当 $\varphi > \varphi_0$ 时，圆盘向右发生水平移动和转动. 注意到

$$v_O = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta} \qquad (1\text{ 分})$$

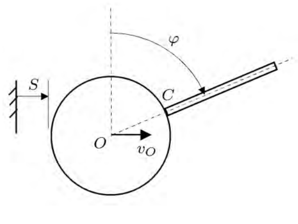


图 24

由式 (10) 有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\theta} = \frac{r\omega_0\cos\varphi_0}{\omega(\theta)} - r\cos\theta \qquad (1\text{ 分})$$

积分上式，并注意到 $\sin\varphi_0 = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$，得

$$S = r\omega_0\int_{\varphi_0}^{\varphi}\sqrt{\frac{J_O - 2mr^2\cos^2\theta}{9mgr(1-\cos\theta) - 2mr^2\omega_0^2}}\mathrm{d}\theta - r\left(\sin\varphi - \frac{\sqrt{5}}{3}\right) \qquad (\varphi > \varphi_0) \qquad (1\text{ 分})$$

十二、 (共 15 分) 如图 25 所示，边长为 h、质量为 m 的均质正方形刚性平板静置于水平面上，且仅在角点 A、C 和棱边中点 B 处与水平面保持三点接触. 位于水平面上的小球以平行于 AC 棱边的水平速度 v_b 与平板发生完全弹性碰撞，碰撞点至角点 A 的距离以 b 表示. 已知平板关于过其中心的铅直轴的转动惯量为 $J = mh^2/6$，在 A、B 和 C 三点处与水平支承面的静摩擦因数和动摩擦因素均为 μ. 略去碰撞过程中的摩擦力冲量，试求

(1) (3 分) 碰撞结束瞬时，平板的速度瞬心位置？

(2) (3 分) 若 $b = 5h/6$，计算碰撞结束瞬时平板的角加速度？

(3) (9 分) 设小球的质量为 $m/21$. 碰撞后，板在水平面内绕 B 点转动，则碰撞点的位置 b 和碰撞前小球速度 v_b 应满足的条件？

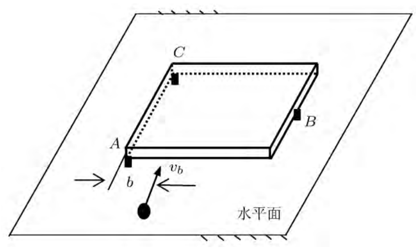


图 25

解答:

两物体碰撞及速度突变都发生在水平面内，在铅直方向，方板仍然处于平衡状态. 由空间平行力系的平衡知三个支撑点的铅直方向反力. 支承面对方板的水平约束力就是动或静摩擦力，由摩擦定律知摩擦力与铅直反力成比例. 因此，在碰撞阶段，水平摩擦力的冲量略去不计.

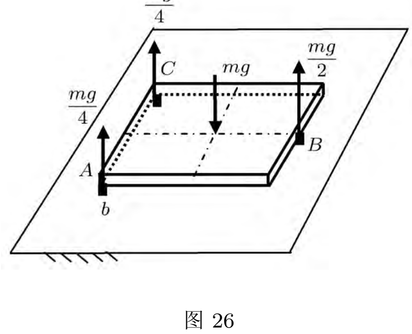


图 26

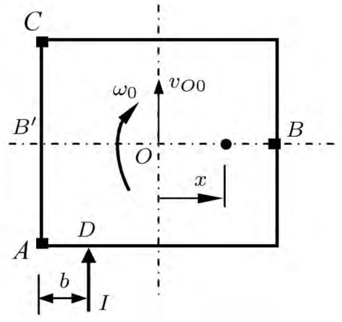


图 27

问题 (1):

记碰撞冲量为 I，考察板

$$\left.\begin{aligned} mv_{O0} &= I \\ J_O\omega_0 &= I\left(\frac{h}{2}-b\right) \end{aligned}\right\} \quad (1\ 分) \qquad (12)$$

$J_O=\dfrac{1}{6}mh^2$，由式 (12) 解出

$$v_{O0}=\frac{I}{m}, \quad \omega_0=\frac{6I}{mh^2}\left(\frac{h}{2}-b\right)$$

碰撞结束瞬时，板作平面运动的速度瞬心位于通过点 B' 和点 B 的直线上.

由 $v_{O0}-x\omega_0=0$ (1 分) 得

$$x=\frac{h}{6(1/2-b/h)} \quad \left(b\neq\frac{h}{2}\right) \quad (1\ 分) \qquad (13)$$

当 $b=h/2$ 时，板作平移，速度瞬心在无穷远处. 式中，x 坐标的原点在点 O，向右为正，向左为负.

问题 (2):

将 $b=5h/6$ 代入式 (13)，有 $x=-h/2$，板逆时针转动. 此时，板的速度瞬心在 AC 棱边中点. 碰撞结束瞬时，板的角加速度由相对于质心的动量矩定理确定.

$$J_O\alpha=M_O \quad (1\ 分) \qquad (14)$$

板在水平面内受 3 个滑动摩擦力作用，如下图所示.

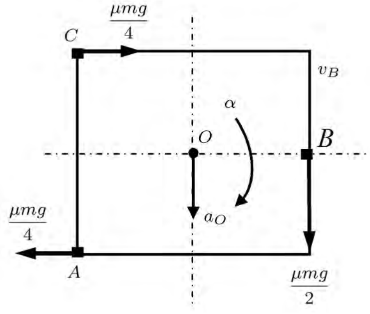


图 28

$$M_O=\frac{\mu mgh}{2} \quad (1\ 分)$$

代入式 (14)，有

$$\alpha=\frac{3\mu g}{h}\ (顺时针) \quad (1\ 分)$$

问题 (3):

B 点速度 $v_B=0$，由式 (13) 知

$$b=\frac{h}{6} \quad (1\ 分)$$

由对 B 点的动量矩守恒得到

$$\frac{m}{21}v_b\cdot\frac{5}{6}h=J_B\omega_0-\frac{m}{21}v_b'\cdot\frac{5}{6}h \quad (1\ 分) \qquad (15)$$

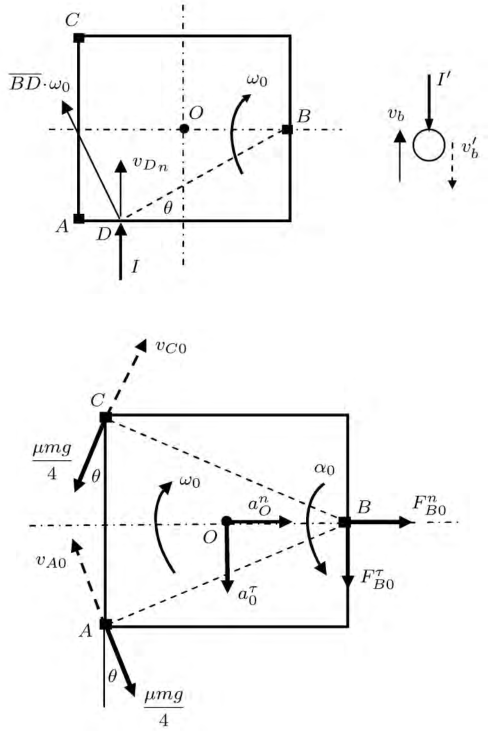


图 29

其中，v_b' 为小球的反弹速度

$$J_B=J_O+\frac{m}{4}h^2=\frac{5}{12}mh^2$$

碰撞点 D 的法向速度为

$$[v_D]_n=\overline{BD}\cdot\omega_0\cdot\cos\theta=\frac{5}{6}h\omega_0$$

完全弹性碰撞条件为

$$v_b'+[v_D]_n=v_b \quad (1\ 分) \qquad (16)$$

结合式 (15) 与式 (16)，解出

$$\omega_0 = \frac{3v_b}{17h} \quad (1\text{ 分})$$

B 点的静摩擦力满足

$$\sqrt{(F_{B0}^n)^2 + (F_{B0}^\tau)^2} \leqslant \frac{\mu mg}{2} \quad (1\text{ 分}) \tag{17}$$

由质心运动定理和对 B 点的动量矩定理

$$\left.\begin{aligned} &ma_{O0}^n = F_{B0}^n \\ &ma_{O0}^\tau = \frac{\mu mg\sqrt{5}}{5} + F_{B0}^\tau \\ &J_B\alpha_0 = M_B = \frac{\mu mgh\sqrt{5}}{4} \end{aligned}\right\} \quad (1\text{ 分}) \tag{18}$$

其中，$a_{O0}^n = \dfrac{h}{2}\omega_0^2$, $a_{O0}^\tau = \dfrac{h}{2}\alpha_0$

由式 (18) 解出 $\alpha_0 = \dfrac{3\sqrt{5}\mu g}{5h}$, $a_{O0}^\tau = \dfrac{3\sqrt{5}\mu g}{10}$, $F_{B0}^\tau = \dfrac{\sqrt{5}\mu mg}{10}$, $F_{B0}^n = \dfrac{1}{2}mh\omega_0^2$. 再由式 (17)，得到

$$v_b \leqslant \frac{34}{3}\sqrt{\frac{\sqrt{5}\mu gh}{10}} \quad (1\text{ 分})$$

此后，板作减速转动，$\omega < \omega_0$, $a_O^n < \dfrac{h}{2}\omega_0^2$, 所以 $F_B^n < F_{B0}^n$. 可见，板在停止转动之前，其 B 端能保持静止不动. (1 分)

十三、 (15 分) 图 30 示圆环细杆，材料的弹性模量为 E，受集度为 m、矢量方向与环杆轴线相切的均布力偶载荷，变形时杆件始终保持弹性状态，且横截面符合平面假设. 环杆轴线半径为 R，环杆横截面为圆，其半径为 r，且 $r/R \ll 1$. 试确定：

(1) (3 分) 横截面上的内力；

(2) (10 分) 横截面的转角 φ；

(3) (4 分) 求横截面上内力的最大值.

【提示】：当$Y/X \ll 1$ 时可做简化：$X + Y \approx X$.

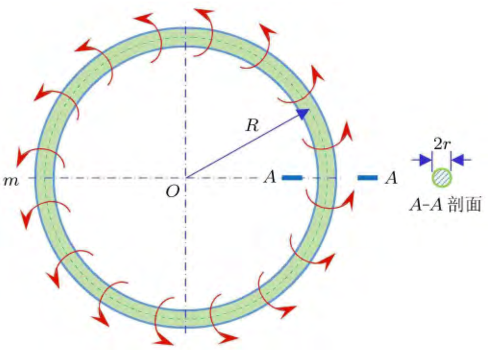


图 30

解答：(1) 横截面上的内力：

由半环杆的力偶平衡得

$$M_z = -mR(\twoheadleftarrow) \quad (1\text{ 分}) \tag{19}$$

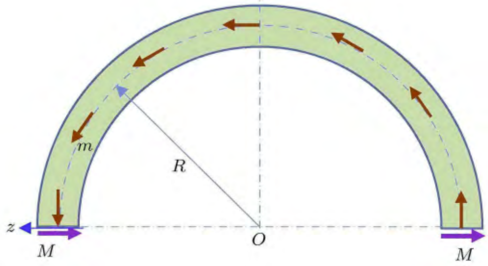


图 31

以右端为例. 通过 (ρ, θ) 点的圆周线正应变 ε 为

$$\varepsilon = \frac{w}{R + \rho\cos\theta} = \frac{\rho(\cos(\theta+\varphi) - \cos\theta)}{R + \rho\cos\theta} \quad (5\text{ 分})$$

$$\varepsilon \approx \frac{\rho}{R}(\cos(\theta+\varphi) - \cos\theta)$$

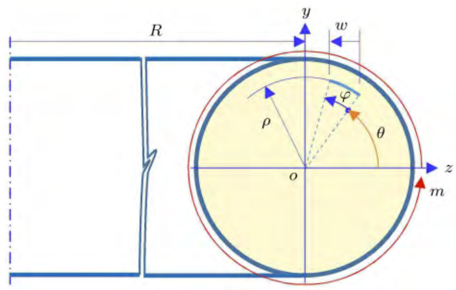


图 32

$$\sigma = E\varepsilon \approx E\frac{\rho}{R}[\cos(\theta+\varphi) - \cos\theta] \tag{20}$$

$$M_z = \int_A y\sigma \mathrm{d}A, \quad M_y = -\int_A z\sigma \mathrm{d}A$$

考虑到转角 φ 比较大，因此在变形后截面上一点的位置坐标表达为

$$y = \rho\sin(\theta+\varphi), \quad z = \rho\cos(\theta+\varphi)$$

将式 (20) 及上述二式代入 M_z 和 M_y 表达式，有

$$M_z = \iint \rho\sin(\theta+\varphi)\frac{E\rho(\cos(\theta+\varphi) - \cos\theta)}{R + \rho\cos\theta}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho \approx$$

$$\iint \rho\sin(\theta+\varphi)\frac{E\rho[\cos(\theta+\varphi) - \cos\theta]}{R}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho =$$

$$\frac{E}{R}\int_0^{2\pi}\sin(\theta+\varphi)[\cos(\theta+\varphi) - \cos\theta]\mathrm{d}\theta\int_0^r \rho^3\mathrm{d}\rho$$

$$M_y = -\iint \rho\cos(\theta+\varphi)\frac{E\rho[\cos(\theta+\varphi)-\cos\theta]}{R+\rho\cos\theta}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho \approx$$

$$-\iint \rho\cos(\theta+\varphi)\frac{E\rho(\cos(\theta+\varphi)-\cos\theta)}{R}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho =$$

$$-\frac{E}{R}\int_0^{2\pi}\cos(\theta+\varphi)[\cos(\theta+\varphi)-\cos\theta]\mathrm{d}\theta\int_0^r\rho^3\mathrm{d}\rho$$

计算出积分可得

$$M_z = -\frac{\pi E r^4}{4R}\sin\varphi \quad (\leftarrow) \tag{21}$$

$$M_y = -\frac{\pi E r^4}{4R}(1-\cos\varphi)\ (\downarrow) \tag{22}$$

比较式 (19) 与式 (22) 得

$$\sin\varphi = \frac{4R^2 m}{\pi E r^4} \tag{23}$$

由此式可见，为了 m 恒正，即 m 与题目中所画方向相同而不矛盾，φ 的取值限定为 $0 \leqslant \varphi < \pi$.

式 (23) 代入式 (22) 得

$$M_y = -\frac{\pi E r^4}{4R}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{4R^2 m}{\pi E r^4}\right)^2}\right]\ (\downarrow) \quad (2\ 分) \tag{24}$$

总之，横截面上的非零内力为

弯矩 $M_z = -mR(\leftarrow)$,

$$M_y = -\frac{\pi E r^4}{4R}\left[1-\sqrt{1-\left(\frac{4R^2 m}{\pi E r^4}\right)^2}\right]\ (\downarrow)$$

(其余内力分量为零，不用写出)

式 (21) 或式 (23) 也可用能量法求得.

(2) 横截面的转角 φ:

由式 (23) 得转角

$$\varphi = \sin^{-1}\left(\frac{4R^2 m}{E\pi r^4}\right) \quad (2\ 分)$$

(3) 内力的最大值 $M_{\max}$

利用式 (21) 和式 (22) 算出横截面上的合弯矩

$$M = \sqrt{M_z^2 + M_y^2} = \frac{\pi E r^4}{2R}\sin\frac{\varphi}{2}$$

可见，当 $\varphi = \pi$ 时，$M = M_{\max}$ (1 分)

$$M_{\max} = \frac{\pi E r^4}{2R} \quad (2\ 分)$$

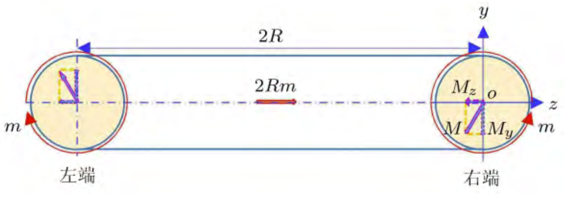


图 33

十四、 (15 分) 图 34 和图 35 所示的薄壁圆环管压力容器，壁厚为 t，环管横截面平均直径为 D，环管轴线半径为 R. 为了加固压力容器，用一根直径为 d 的细钢丝缠绕圆管，钢丝缠绕时拉紧，以至于钢丝与压力容器间的摩擦力达最大. 缠绕的钢丝相邻两圈间相互紧挨，但可忽略其相互挤压作用. 只考虑钢丝因长度方向拉伸引起的变形，即可忽略钢丝的弯曲、扭转等变形. 设 $t/D \ll 1$，$D/R \ll 1$ 且 $d/D \ll 1$. 钢丝材料的弹性模量为 E_s，压力容器材料的弹性模量和泊松比分别为 E 和 ν，钢丝与压力容器间的摩擦因数为 μ.

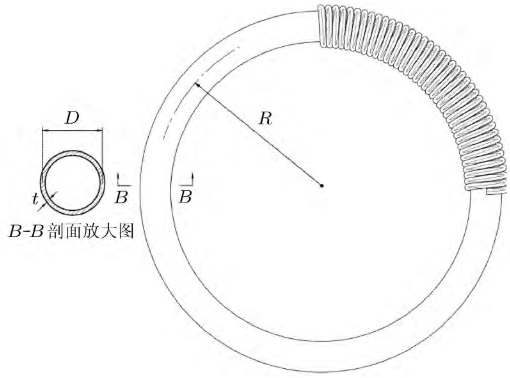


图 34

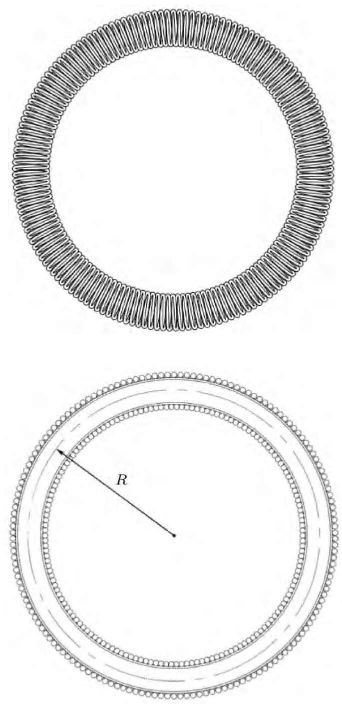


图 35

(1) 已知：钢丝缠绕圈数的最大值 n 为偶数，当环管外表面缠满钢丝时，如图 35 所示，钢丝最大拉力为 P. 环管外表面缠满钢丝后将钢丝两端互相连接，并让钢丝缓慢松弛. 求此时：

① (3 分) 钢丝的伸长量 Δl_0;

② (2 分) 钢丝的张力 F_0;

③ (5 分) 环管横截面上的应力 σ_l 及环管柱面形纵截面 (参考图 36) 上的应力 σ_v.

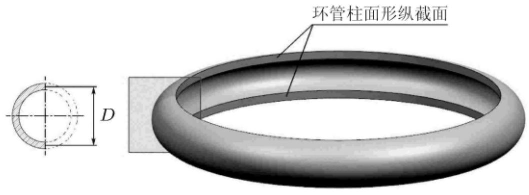


图 36

(2) (5 分) 在 (1) 中状态的基础上，压力容器施加内压，压强为 p. 试写出关于钢丝张力增量 ΔF、环管柱面形纵截面上应力增量 $\Delta\sigma_v$ 的联立方程组.

【提示】：做简化处理：$\cos\dfrac{\pi}{n}\approx 1$；若 $X/Y\ll 1$，则 $Y+X\approx Y$.

解答：

(1) 钢丝缠绕圈数的最大值 n

记

$$R' = R - \frac{D+\delta+d}{2}$$

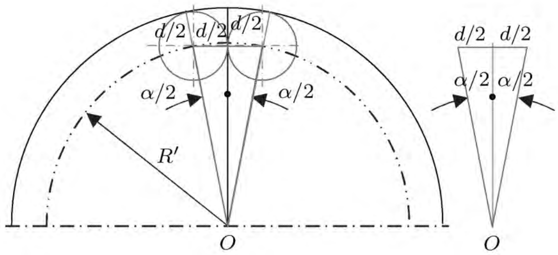
那么

$$\frac{\alpha}{2} = \tan^{-1}\left(\frac{d}{2R'}\right)$$

钢丝缠绕圈数的最大值 n 为

$$n = \frac{2\pi}{\alpha} = \frac{\pi}{\tan^{-1}\left(\dfrac{d}{2R'}\right)} \approx \frac{\pi}{\tan^{-1}\left(\dfrac{d}{2R}\right)} \tag{25}$$

记 $D' = D + \delta$



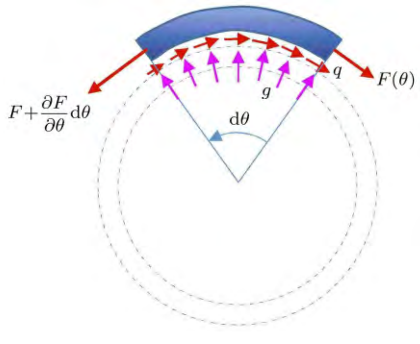


图 37

① 钢丝的伸长量 Δl_0

由力的平衡可得

$$\left.\begin{aligned} & g\cdot\frac{D'}{2} = F \\ & \frac{qD'}{2} = \frac{\partial F}{\partial\theta} \\ & q = \mu g \\ & F\,|_{\theta=2n\pi} = P \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

解此方程，得

$$F(\theta) = P\mathrm{e}^{\mu(\theta-2n\pi)} \tag{27}$$

始端拉力可通过钢丝末端拉力 P 表达为

$$F(0) = P\mathrm{e}^{-2n\pi\mu}$$

钢丝绕满环管表面后两端刚连接之前，钢丝伸长量

$$\Delta l_0 = \int_0 \frac{N(\theta)}{E_\mathrm{s}A}\mathrm{d}s = \frac{1}{E_\mathrm{s}A}\int_0^{2n\pi} F(\theta)\frac{D'}{2}\mathrm{d}\theta$$

即

$$\Delta l_0 = \frac{D'}{2E_\mathrm{s}A}P\mathrm{e}^{-2n\pi\mu}\frac{1}{\mu}\mathrm{e}^{\mu\theta}\,\Big|_0^{2n\pi} = \frac{D'P}{2E_\mathrm{s}A\mu}(1-\mathrm{e}^{-2n\pi\mu}) \approx \frac{DP}{2E_\mathrm{s}A\mu}(1-\mathrm{e}^{-2n\pi\mu}) \tag{28}$$

② 钢丝的张力 F_0

两端连接的钢丝松弛后，钢丝伸长量将保持不变，从而拉力将沿钢丝长度不变，即 $F=F_0$, 恒定. 那么，有

$$\Delta l_0 = \frac{F_0 n\pi D'}{E_\mathrm{s}A} \tag{29}$$

由此得钢丝的张力

$$F_0 = \frac{E_\mathrm{s}A\Delta l_0}{n\pi D'} = \frac{P}{2\mu n\pi}(1-\mathrm{e}^{-2n\pi\mu}) \tag{30}$$

③ 环管的应力 σ_l 和 σ_v

求管道横截面上的应力 σ_l：用一个竖直平面沿管道环线的直径将压力容器切开成相等的两半，由力的平衡可知

$$\sigma_l = 0 \tag{31}$$

求环管柱面形纵截面上的应力 σ_v：先用一个竖直平面沿管道环线的直径切开，再用过管道轴线的竖直圆柱面将管道切成两半.

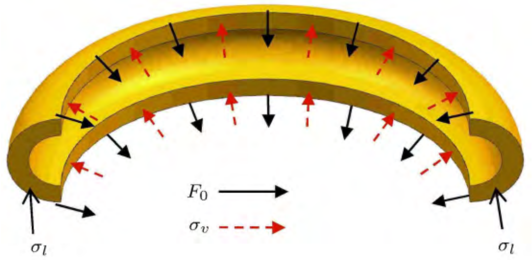


图 38

可分两种情形讨论.

情形 1：如下图所示

$\alpha = 2\pi/n$，记 $\theta_j = (j-1/2)\alpha$，平衡方程为

$$\sum_{j=1}^{n/2} F_0 \sin\theta_j - \sigma_v \cdot 2R \cdot 2\delta - 2\frac{\pi D}{2}\delta\sigma_l = 0 \tag{32}$$

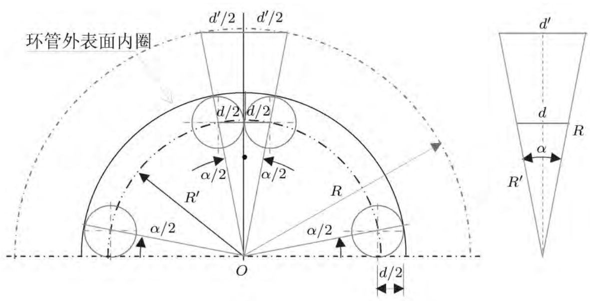


图 39

由图不难看出，其中和式可计算如下

$$\sum_{j=1}^{n/2} \sin\theta_j = \frac{1}{d'}\sum_{j=1}^{n/2} d' \sin\theta_j = \frac{1}{d'}2R = \frac{2R}{d'} \tag{33}$$

式中，d' 计算如下

因为

$$\frac{d}{d'} = \frac{R'}{R} = \frac{R - \dfrac{D+\delta+d}{2}}{R} = 1 - \frac{D+\delta+d}{2R}$$

所以

$$d' = \frac{d}{1 - \dfrac{D+\delta+d}{2R}}$$

将式 (33) 代入式 (32)，得

$$2\frac{F_0}{d'}R - 4\sigma_v R\delta - \pi D\delta\sigma_l = 0 \tag{34}$$

$$\sigma_v = \frac{1}{4R\delta}\left(\frac{F_0 2R}{d'} - \pi D\delta\sigma_l\right)$$

将式 (31) 代入上式得

$$\sigma_v = \frac{F_0}{2\delta d'}$$

即

$$\sigma_v = \frac{P}{4\mu n\pi\delta d'}(1-\mathrm{e}^{-2n\pi\mu}) \approx \frac{P}{4\mu n\pi\delta d}(1-\mathrm{e}^{-2n\pi\mu}) \tag{35}$$

情形 2：如下图所示

可列出

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} F_0 \sin\theta_j - \sigma_v 2R2\delta - \sigma_l \pi D\delta = 0$$

$$\theta_j = j\alpha, \quad \alpha = \frac{2\pi}{n}$$

$$\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} d' \sin\theta_j = 2R\cos\frac{\alpha}{2} = 2R\cos\frac{\pi}{n} \approx 2R$$

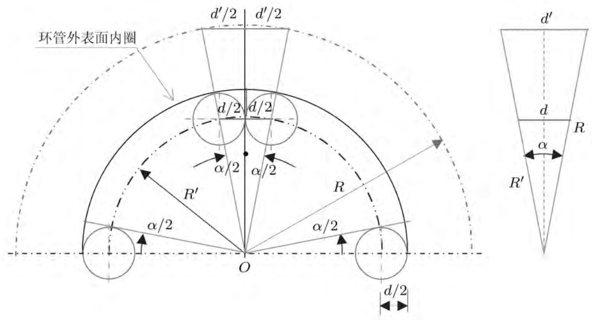


图 40

将上式与式 (32) 比较可见，做近似处理 $\cos(\pi/n) \approx 1$ 后，本情形中和式结果与情形 1 的相同. 于是可认为式 (34) 对所有情形恒成立.

(2) 环管柱面形纵截面上的应力 σ_v

当有内压 p 时，记由于施加 p 而引起的竖直纵截面上的应力增量为 $\Delta\sigma_v$(压为正)，钢丝与管外表面间压应力增量为 $\Delta\sigma_g$(压为正)，钢丝拉力增量为 ΔF(拉为正)，管横截面应力增量为 $\Delta\sigma_l$(压为正).

求环管道横截面上的应力增量 $\Delta\sigma_l$：用一个竖直平面沿管道环线的直径将压力容器切开成相等的两半，可知代替方程 (31) 的是

$$\pi D\delta\Delta\sigma_l = -\frac{\pi}{4}D^2 p$$

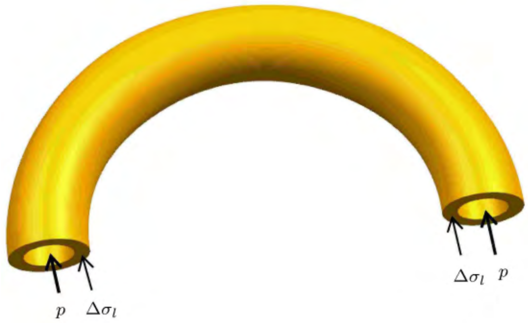


图 41

即

$$\Delta\sigma_l = -\frac{Dp}{4\delta} \tag{36}$$

求环管柱面形纵截面上的应力 σ_v：变形协调方程为 $\Delta\varepsilon_s = \Delta\varepsilon_v$，此即

$$\frac{4\Delta F}{E_s\pi d^2} = -\frac{1}{E}[\Delta\sigma_v - \nu(\Delta\sigma_l + \Delta\sigma_g)] \tag{37}$$

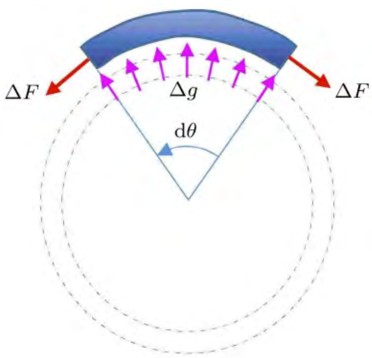


图 42

参考式 (31) 有

$$\Delta g \cdot \frac{D'}{2} = \Delta F$$

而 $\Delta\sigma_g = \dfrac{\Delta g}{d}$.

将式 (36) 及上式代入式 (37)，得

$$\frac{4\Delta F}{E_s\pi d^2} = -\frac{1}{E}\left[\Delta\sigma_v - \nu\left(-\frac{Dp}{4\delta} + \frac{2\Delta F}{D'd}\right)\right] \tag{38}$$

在有 p 存在的情况下，仿照式 (34) 可写出

$$2\frac{R}{d'}\Delta F - 4R\delta\Delta\sigma_v - \pi D\delta\Delta\sigma_l = \left[2R(D-\delta) + \frac{\pi}{4}(D-\delta)^2\right]p$$

将式 (36) 代入，上式变为

$$2\frac{R}{d'}\Delta F - 4R\delta\Delta\sigma_v + \frac{\pi D^2}{4}p = \left[2R(D-\delta) + \frac{\pi}{4}(D-\delta)^2\right]p \tag{39}$$

式 (38)、式 (39) 即为关于 ΔF 和 $\Delta\sigma_v$ 的联立方程组.

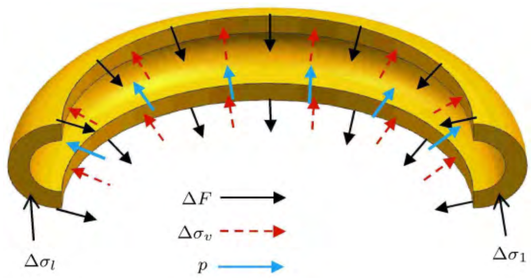


图 43

《力学与实践》微信公众号征稿启事

为更好地丰富期刊微信公众平台内容，充分体现力学的独特之美，本刊微信公众号面向广大作者和读者征集原创稿件！

文章题材不限，只要有创意、有文采、有亮点！稿件文字应生动活泼、简洁易读，彩色图片清晰美观，展示很好的力学科学内涵。文章字数无具体要求，但为了便于阅读，建议控制在 1000~5000 字.

微信平台长期征稿，一经选用，作者可获赠当年全年《力学与实践》期刊. 此外，被选用稿件将择优推荐至《力学与实践》纸刊发表.

微信投稿文章请发送到 lxsj@cstam.org.cn　编辑部联系电话：010-82543907.　期待您的参与！

《力学与实践》编辑部