

第十一届全国周培源大学生力学竞赛 (个人赛) 试题

出题学校：湖南大学

(本试卷分为基础题和提高题两部分 满分 120 分 时间 3 小时 30 分)

说明：个人赛奖项分为全国特、一、二、三等奖和优秀奖。全国特、一、二等奖评选标准是：提高题得分进入全国前 5%，并且总得分排在全国前列，根据总得分名次最终确定获奖人。全国三等奖和优秀奖直接按赛区内总得分排名确定获奖人。

注意：试题请全部在答题纸上作答，否则作答无效。各题所得结果用分数或小数表示均可。

第一部分 基础题部分（填空题，共60分）

第 1 题（6 分）

图 1 所示正方体边长为 c ，其上作用四个力 F_1 、 F_2 、 F_3 、 F_4 ，其中各力大小之间的关系为 $F_1=F_2=F_a$ ， $F_3=F_4=F_b$ 。

- (1)、(2 分) 此力系对 OA 轴之矩的大小为 ()；
- (2)、(2 分) 若此力系可简化为一个力，则 F_a 与 F_b 的关系为 ()；
- (3)、(2 分) 若 $F_a = F_b = F$ ，此力系简化为一力螺旋，则其中的力偶矩大小为()。

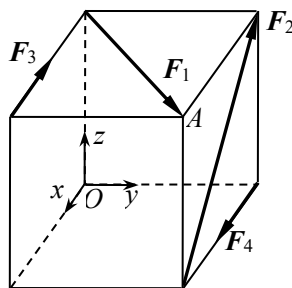


图 1

第 2 题（6 分）

两匀质圆轮 A 和 B 的质量同为 m ，半径同为 r 。如图 2 所示，轮 A 沿着水平面运动，绕于轮 B 的细绳通过定滑轮 C 后与轮 A 的中心相连，其中 CA 段绳水平， CB 段绳铅直。不计定滑轮 C 与细绳的

质量，且细绳不可伸长。系统处于铅垂平面内，自静止释放。

(1)、(2分) 若轮 A 既滚又滑，则系统的自由度为 (_____);

(2)、(4分) 若轮 A 与水平支承面光滑接触，则轮 B 下落的高度与时间的关系为
(_____);

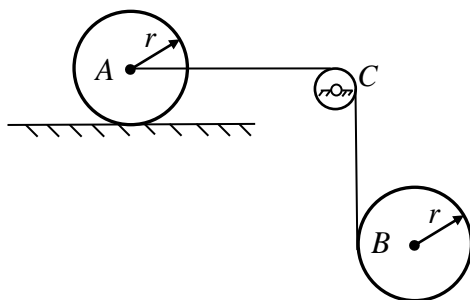


图 2

第 3 题 (6 分)

桁架的杆件内力可以应用节点法、截面法以及虚位移原理进行求解。图 3 所示静定桁架由水平杆、竖直杆和 45° 斜杆组成。在 B 处受固定铰支座约束， A 、 C 两处由可水平运动的铰支座支承。桁架上作用了三个大小同为 F 的载荷。则

(1)、(2分) 杆 DH 的内力为 (_____);

(2)、(4分) 杆 BE 的内力为 (_____);

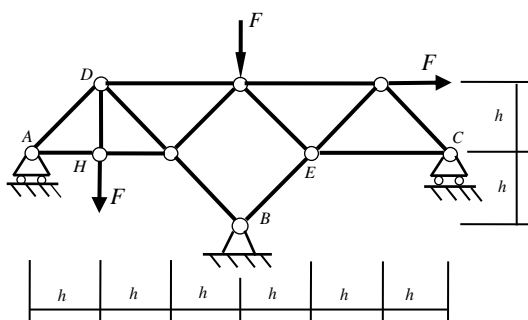


图 3

第 4 题 (6 分)

如图 4 所示，小车上斜靠了长为 L ，质量为 m 的均质杆 AB ，倾角以 θ 表示。杆处于铅垂平面内，其 B 端与小车壁光滑接触， A 端与小车底板的摩擦角为 $\varphi_m = 30^\circ$ 。小车由动力装置驱动（图中未画出），沿水平直线向左运动，且其运动可以被控制。小车运动过程中，杆 AB 相对于小车始终保持静止。

(1)、(3分) 若小车作匀速运动，则倾角 θ 要满足的条件为(_____);

(2)、(3分) 若小车作加速度向右的减速运动, 则小车加速度 a 与倾角 θ 应满足的关系为
 (_____)。

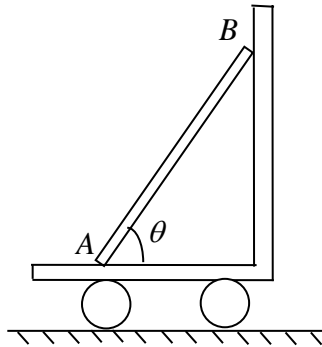


图 4

第 5 题 (6 分)

如图 5 所示, 细圆环管在相连部件 (图中未画出) 带动下沿水平直线轨道纯滚动, 管内有一小壁虎, 相对于环管爬行, 壁虎可被视为一点, 在图中以小球 B 代替。图示瞬时, 壁虎与环管的中心处于同一水平线上, 壁虎相对环管的速率为 u , 相对速度的方向朝下, 相对速度大小的改变率等于 0, 环管中心 O 点的速度向右, 速度大小也为 u , 加速度为 0。环管的中心半径等于 R 。则在此瞬时

- (1)、(2分) 壁虎相对地面的速度大小为 (_____);
- (2)、(2分) 壁虎相对地面的加速度大小为 (_____);
- (3)、(2分) 壁虎在相对地面的运动轨迹上所处位置点的曲率半径为 (_____)。

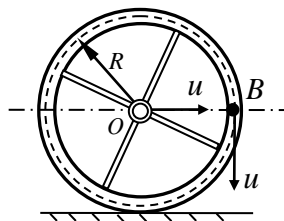


图 5

第 6 题 (5 分)

图 6 所示结构中, 铅垂杆①和斜杆②均为弹性杆, 斜杆②与水平线之间的夹角为 θ , 直角三角形 ABC_2 为刚体, 边 BC_2 处于水平位置。已知 a 、 δ 和 θ , 现将 C_1 和 C_2 联结在一起, 则求该两杆轴力用到的平衡方程和变形协调方程:

- (1)、(2分) 平衡方程 (杆①、杆②的轴力分别用 F_{N1} 和 F_{N2} 表示) 为 (_____);

(2)、(3分) 变形协调方程 (杆①、杆②的变形分别用 Δl_1 和 Δl_2 表示) 为 (_____)。

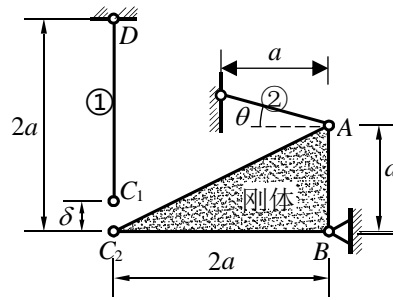


图 6

第 7 题 (5 分)

一种能量收集装置, 可简化为图 7 所示悬臂梁模型。梁 AB 长 l , 弯曲刚度为 $2EI$; 梁 BC 、 BD 长均为 l , 弯曲刚度均为 EI 。梁 AB 与梁 BC 、 BD 通过刚节点 B 连接, 三梁均处于水平位置。梁和刚节点 B 的重量均不计。梁 BC 、 BD 端部均固定有重量为 W 的物块, 该两梁之间有小间隙。则梁端 D 的挠度与物块重量之比 $f_D/W =$ (_____)。

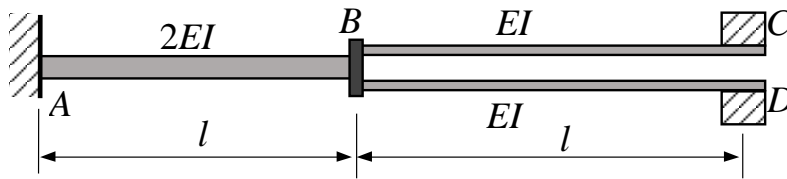


图 7

第 8 题 (6 分)

已知一危险点的单元体处于平面应力状态, 最大切应变 $\gamma_{\max} = 5 \times 10^{-4}$, 通过该点相互垂直的微截面上正应力之和为 28MPa 。若材料的弹性模量 $E = 200\text{GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.25$ 。则

(1)、(3分) 该点主应力分别为 $\sigma_1 =$ (_____) MPa , $\sigma_2 =$ (_____) MPa , $\sigma_3 =$ (_____) MPa ;

(2)、(3分) 用最大切应力强度理论校核时的相当应力为 $\sigma_{r3} =$ (_____) MPa 。

第 9 题 (6 分)

图 8 所示刚架中, 水平梁为刚杆, 竖直杆①、②均为细长弹性杆, 只考虑与纸面平行的平面内的失稳。则

(1)、(2分) 刚架失稳时载荷的最小值 F 由杆 (_____) 决定; [注: 填入①, ②]

(2)、(4分) 刚架失稳时载荷的最小值 $F =$ (_____)。

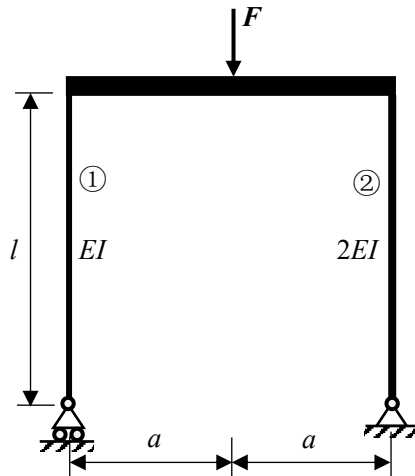


图 8

第 10 题 (8 分)

图 9 所示等截面直角刚架 ACB ，杆件横截面为圆形，弯曲刚度为 EI ，扭转刚度为 $0.8EI$ 。 C 处承受大小为 m 、方向如图所示的外力偶，该力偶矢量与刚架轴线处于同一平面内。则

(1)、(4 分) 截面 A 的弯矩 $M =$ ()；

(2)、(4 分) 截面 B 的扭矩 $T =$ ()。

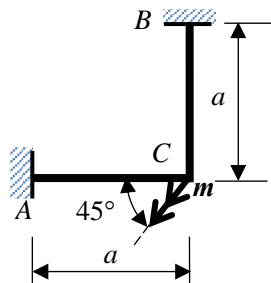


图 9

第二部分 提高题部分 (计算题, 共60分)

第11题 (共15分)

如图10(a)所示，圆轮和细直杆 AC 质量均为 m ，固结成一组合刚体，其中，杆 AC 沿圆轮径向， O 为圆轮轮心， C 点为轮与杆的固结点，也是组合刚体的质心。初始时刻，组合刚体静止于水平地面，左边紧靠高度为 r 的水平台阶，然后，受微小扰动后向右倾倒，以 φ 表示组合刚体在杆端 A 与地面接触之前的转动角度 (参见图10(b))。圆轮均质，半径为 r ，组合刚体关于过轮心 O 并垂直于圆轮的轴之转动惯量为 J_0 。略去各处摩擦，试分析组合刚体由初始位置至 A 端与地面接触之前的动力学过程，并求

(1)、(5 分) 圆轮与台阶 B 点开始分离时的角度 φ 的大小；

(2)、(6 分) 组合刚体的角速度与角度 φ 的关系；

(3)、(4 分) 圆轮右移的距离 S 与角度 φ 的关系。

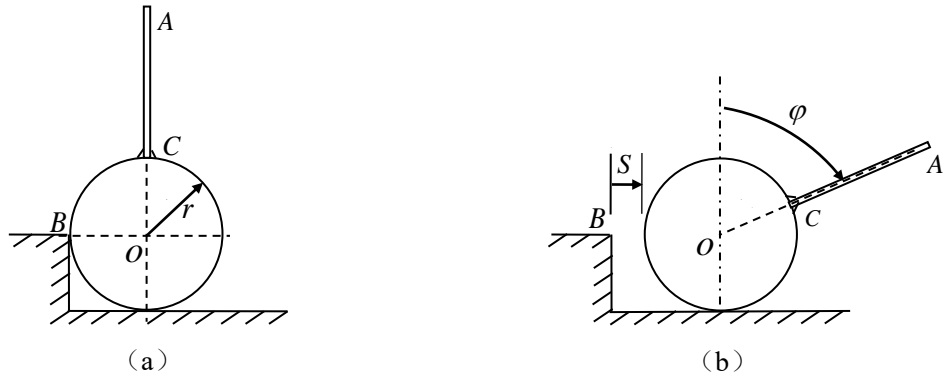


图 10

第12题（共15分）

如图11所示，边长为 h 、质量为 m 的均质正方形刚性平板静置于水平面上，且仅在角点 A 、 C 和棱边中点 B 处与水平面保持三点接触。位于水平面上的小球以平行于 AC 棱边的水平速度 v_b 与平板发生完全弹性碰撞，碰撞点至角点 A 的距离以 b 表示。已知平板关于过其中心的铅直轴的转动惯量为 $J = mh^2/6$ ，在 A 、 B 和 C 三点处与水平支承面的静摩擦因数和动摩擦因数均为 μ 。略去碰撞过程中的摩擦力冲量。

- (1)、（3分）试求碰撞结束瞬时平板的速度瞬心位置；
- (2)、（3分）若 $b = 5h/6$ ，试求碰撞结束瞬时平板的角加速度；
- (3)、（9分）设小球的质量为 $m/21$ 。碰撞后，平板在水平面内绕 B 点转动，试求碰撞点的位置 b 和碰撞前小球的速度 v_b 应满足的条件。

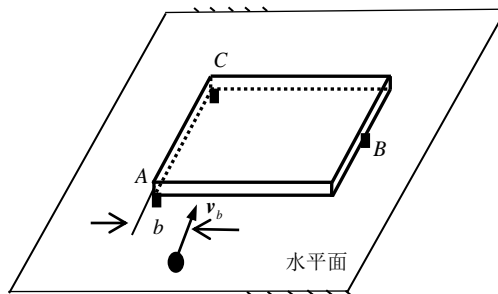


图 11

第13题（共15分）

图12所示的圆环杆，材料的弹性模量为 E ，受集度为 m 、矢量方向与环杆轴线相切的均布力偶载荷，变形时杆件始终保持弹性状态，且横截面符合平面假设。圆环杆轴线半径为 R ，横截面（如图中 $A-A$ 截面）为圆，其直径为 $2r$ ，且 $r/R \ll 1$ 。试求

- (1)、（3分）横截面上的内力；
- (2)、（10分）横截面的转角 φ ；
- (3)、（2分）横截面上内力的最大值。

【提示】：当 $X/Y \ll 1$ 时可做简化： $Y+X \approx Y$ 。

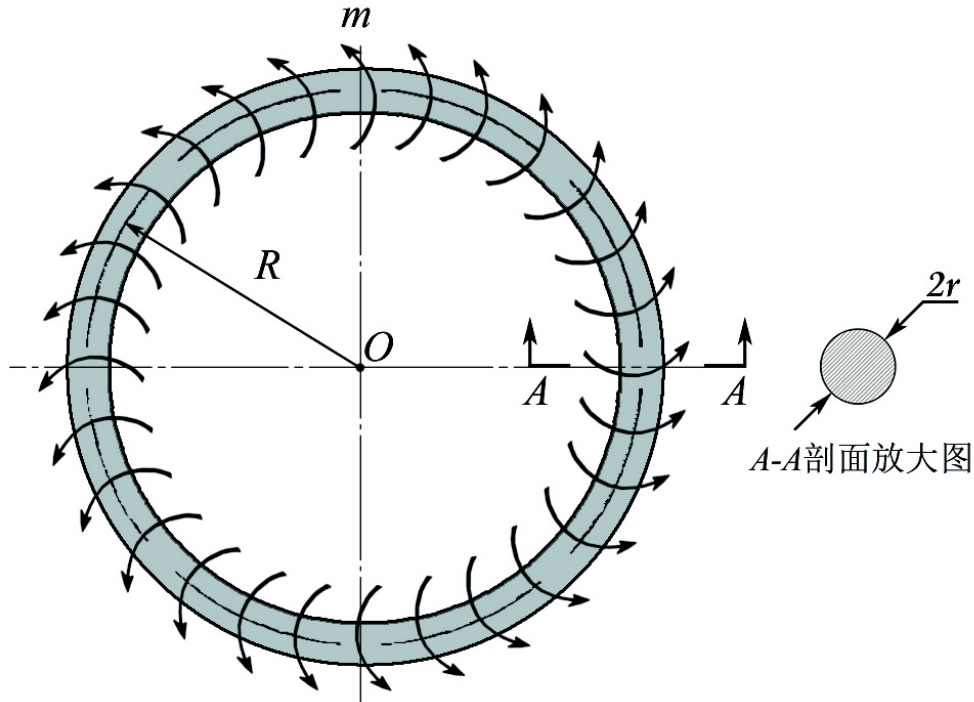


图 12

第14题 (共15分)

如图13、14所示，薄壁圆管压力容器壁厚为 t ，环管轴线半径为 R ，环管横截面平均直径为 D 。为了加固压力容器，用一根直径为 d 的细钢丝缠绕圆管，缠绕时拉紧，以至于钢丝与压力容器间的摩擦力达最大。缠绕的钢丝相邻两圈间相互紧挨，但可忽略其相互挤压作用。只考虑钢丝因长度方向拉伸引起的变形，即忽略钢丝的弯曲、扭转等变形。设 $t/D \ll 1$ ， $D/R \ll 1$ ，且 $d/D \ll 1$ 。钢丝材料的弹性模量为 E_s ，压力容器材料的弹性模量和泊松比分别为 E 和 ν ，钢丝与压力容器间的摩擦因数为 μ 。

(1) 已知：钢丝缠绕圈数的最大值 n 为偶数，当环管外表面缠满钢丝但两端尚未连接时，钢丝最大拉力为 P 。环管外表面缠满钢丝后将钢丝两端互相连接(参见图 14)，并让钢丝缓慢松弛。求此时：

- ① (3分) 钢丝的伸长量 Δl_0 ；
- ② (2分) 钢丝的张力 F_0 ；
- ③ (5分) 环管横截面上的应力 σ_r 及环管柱面形纵截面(参考图 15)上的应力 σ_ν 。

(2) (5分) 在(1)状态的基础上，压力容器施加内压，压强为 p 。试写出关于钢丝张力增量 ΔF 、环管柱面形纵截面上应力增量 $\Delta \sigma_\nu$ 的联立方程组。

【提示】：做简化处理： $\cos(\pi/n) \approx 1$ ；若 $X/Y \ll 1$ ，则 $Y+X \approx Y$ 。

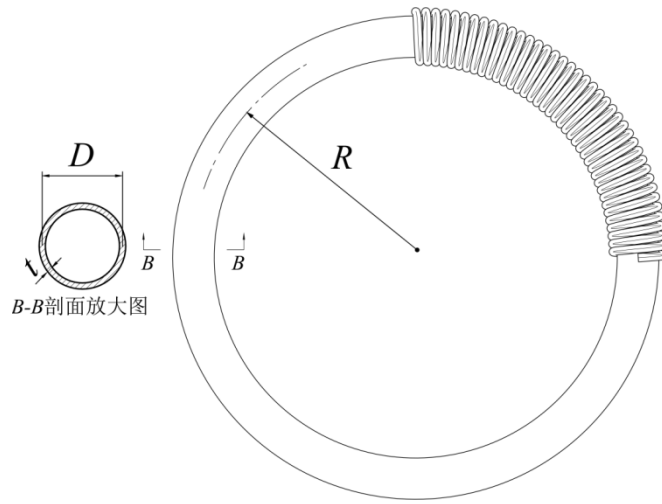


图 13

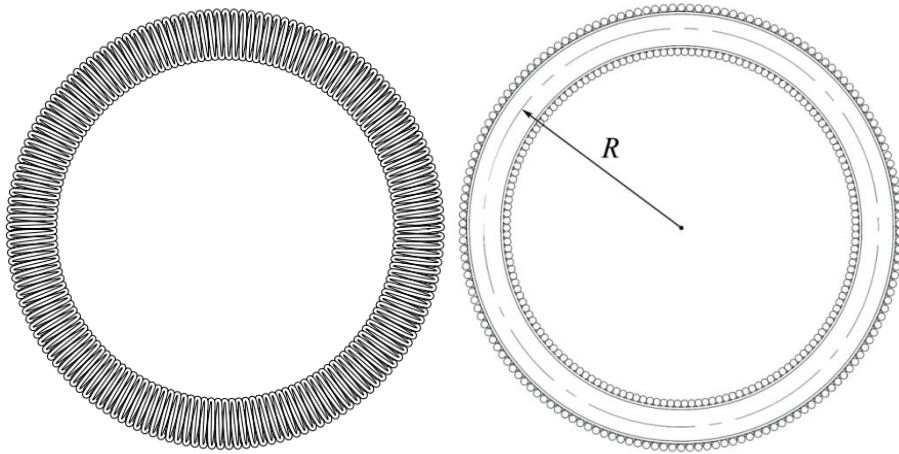


图 14

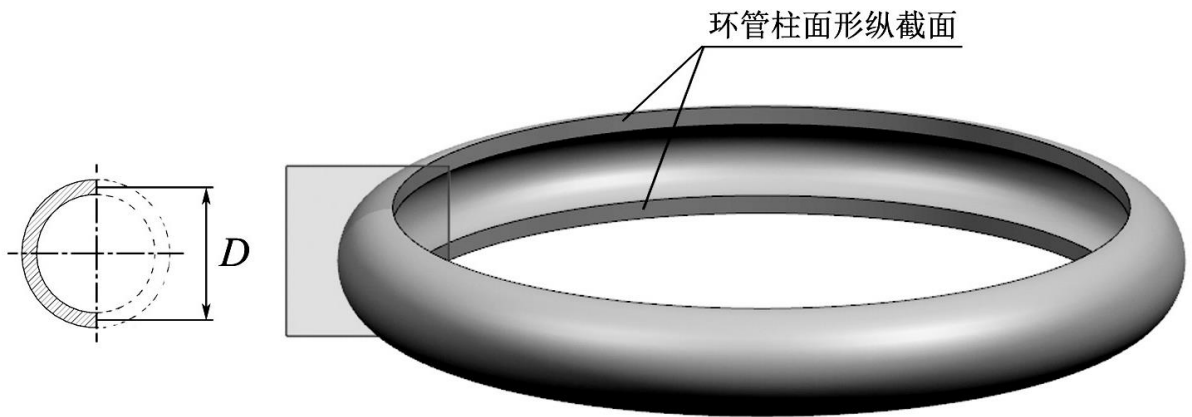


图 15