伯努利方程对流体力学理论建立的历史贡献

刘沛清[1)] 赵芸可

(北京航空航天大学陆士嘉实验室，北京 100191)

摘要 著名的理想流体定常流动的能量方程即伯努利方程，自建立以来在流体力学领域中贡献卓著。本文依据伯努利方程的建立内涵，阐述了其在流体静力学、定常孔口出流、皮托管测速、文丘里管流量和翼型绕流等具体流动中的成功应用。同时，进一步说明了由伯努利方程建立提出的局部跟随流体质点的建模思想，被欧拉概括为描述流体运动的流场法，是建立欧拉方程组和N–S方程组的基本依据，也为后来湍流理论、边界层理论、气动噪声等理论的建立奠定了基础。

关键词 流体力学，伯努利方程，流体机械工程

中图分类号：O355 **文献标识码**：A doi：10.6052/1000-0879-19-179

THE HISTORICAL CONTRIBUTION OF BERNOULLI'S EQUATION TO THE ESTABLISHMENT OF FLUID MECHANICS THEORY

LIU Peiqing[1)] ZHAO Yunke

(Beihang University School of Aeronautical Science and Engineering, Beijing 100191, China)

Abstract The famous energy equation for the steady flow of ideal fluids, the Bernoulli equation, has contributed greatly to the fluid mechanics since its publication. Based on the connotation of Bernoulli equation, this paper discusses its successful application in hydrostatics, steady orifice outflow, pitot tube velocity measurement, venturi flow and airfoil flow. At the same time, the modeling of the local following fluid particles is suggested by Bernoulli equation. It is summarized by Euler as the flow field method describing the fluid motion, which is the basic basis for deriving the Euler equations and the NS equations. It also laid the foundation for the establishment of the later turbulence theory, boundary layer theory, aerodynamic noise and other theories.

Key words fluid mechanics, Bernoulli equation, fluid mechanical engineering

1 伯努利方程的建立

学过流体力学的人们知道，在1738年瑞士数学世家丹尼尔·伯努利[1] (Daniel Bernoulli，1700—1782，如图1所示)将质点运动的动能定理运用于同一微元流管的两截面上，导出了表征一元流机械能守恒方程，即著名的理想流体定常流动的能量方程(后称为伯努利方程)。同时在建立这个方程时，伯努利所用的局部跟随流体质点的分析思想，后来(1755年)被瑞士数学家与流体力学家欧拉(Leonhard Euler，1707—1783)概括为描述流体运动的流场法，在流体力学中得到广泛应用。

对于理想不可压缩流体的定常流动，在质量力为重力作用下，伯努利方程表明：沿同一条流线单位重量流体质点所具有的总机械能守恒(单位重量流体质点的位置势能、压强势能和动能之和不变，或总水头为常数)，即

2019–05–06 收到第 1 稿，2019–07–18 收到修改稿。

1) E-mail: lpq@buaa.edu.cn

引用格式： 刘沛清, 赵芸可. 伯努利方程对流体力学理论建立的历史贡献. 力学与实践, 2020, 42(2): 258-264

Liu Peiqing, Zhao Yunke. The historical contribution of Bernoulli's equation to the establishment of fluid mechanics theory. *Mechanics in Engineering*, 2020, 42(2): 258-264

$$z+\frac{p}{\gamma}+\frac{V^2}{2g}=H=\mathrm{C} \tag{1}$$

其中，z 为流体质点的位置；p 为流体质点的压强；V 为流体质点的速度；γ 为流体容重；g 为重力加速度；$H=\mathrm{C}$ 为常数 (单位重量流体质点所具有的总机械能即总水头)，如图 2 所示。在不计质量力的条件下 (空气的质量密度小，可以忽略重力的影响)，此时沿同一条流线 [2] 单位体积流体质点所具有的压强势能和动能之和不变，总压不变，即

$$p+\rho\frac{V^2}{2}=p_{\mathrm{o}}=\mathrm{C} \tag{2}$$

其中，p_{o} 为流体质点的总压，p 为流体质点的静压，$\rho\dfrac{V^2}{2}$ 为流体质点的动压 [3]。

图 1　瑞士流体力学家伯努利

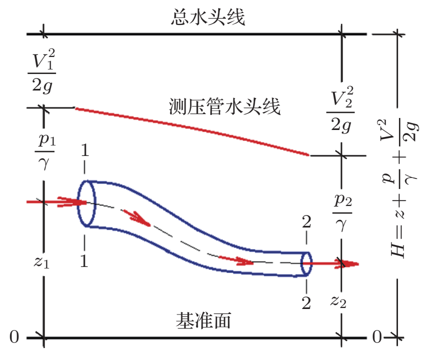

图 2　理想流体的伯努利方程几何表示

任何理论都是在大量实验研究的基础上发展起来的，流体力学理论的建立也不例外，从历史发展角度看，如果没有大量的流动实验成果，如果没有微积分的出现和连续介质力学，就不会有伯努利方程的建立。可以毫不夸张地说，伯努利方程为人们研究流体运动大开脑洞，起到了里程碑的作用，如果没有伯努利方程不可能将一些貌似不相干的现象用统一理论公式精确表达；如果没有伯努利方程的建模思想，也不可能有后来的表征理想流体微团运动的欧拉方程组；如果没有 Euler 方程组，更不会推广到表征黏性流体微团运动的 Navier–Stokes 方程组 (N–S 方程组)。当然，如果没有这些，就不会有流体力学的基本理论，也不会有后来的边界层理论、湍流、流动控制、气动噪声等理论的建立，概括起来可以用图 3 表达流体力学和空气动力学的发展历程 [1]。伯努利方程作为流体力学的核心方程，起到灵魂的作用。以下通过具体应用和理论推广说明。

图 3　流体力学和空气动力学的发展历程

2 伯努利方程的应用

2.1 流体静力学原理

公元前250年，受西西里岛叙拉古国王检验皇冠之委托，阿基米德(Archimedes，古希腊人，公元前287—公元前212)研究了力平衡原理，提出著名的流体力学浮力定理，也是流体静力学的一部分。这个著名的流体浮力原理，在伯努利方程出现之后，人们惊奇地发现它是在静止状态下伯努利方程的精准表达，即

$$z+\frac{p}{\gamma}=\mathrm{C} \tag{3}$$

其中，z为流体质点的位置；p为流体质点的压强；γ为流体容重；C为常数。1653年，法国科学家帕斯卡(Pascal B，1623—1662)提出了流体静压力传递原理(即帕斯卡定理)，并制成了首台水压机(如图4所示)，也是利用了静止状态下的伯努利方程。

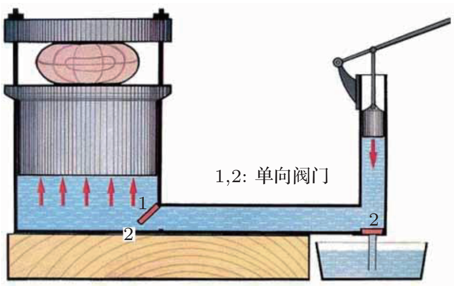

图4 水压机原理

2.2 定常孔口出流公式

1643年，意大利科学家托里拆利(Torricelli E，1608—1647)通过大量的孔口出流实验，提出了定常孔口出流的基本公式，表明孔口出流速度与孔口上的水深h平方根成正比，即

$$h=\frac{V_{\rm c}^2}{2g},\quad V_{\rm c}=\sqrt{2gh} \tag{4}$$

其中，h为液面高度；$V_{\rm c}$为出口水流速度。这个方程实际也是伯努利方程在大气压明流下的精确表达形式。其物理意义是，单位重量流体质点从1液面位置运动到2出口位置，其所具有的重力势能转变成为相应的动能[4]，如图5所示。

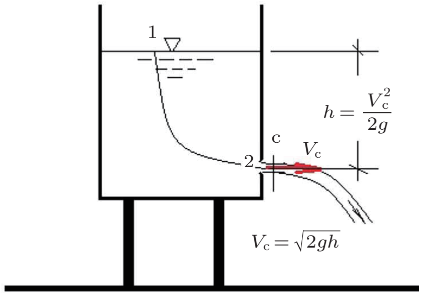

图5 在大气压出流条件下的伯努利方程表示

2.3 皮托管测速仪[2]

1732年，法国水力工程师毕托(Henri Pitot，1695—1771)发明了一种测量流体中总压的装置，即皮托管(如图6所示，也有叫毕托管)。皮托发现河流中的水柱高度正比于皮托管入口水深处流速的平方，水流中任意一点的速度大小，可以对同一点分别用总压管和静压管的测量值之差获得。1905年世界流体力学大师普朗特(Ludwig Prandtl，1875—1953)将这一方法发展成为同时测量流体总压和静压的装置，提出了普朗特风速管，也叫皮托管测速仪(如图7所示)。皮托管测速原理，也是伯努利方程的精确表达，表明流体质点的动压等于同一点流体质点的总压与静压之差，即

$$\left.\begin{aligned}\rho\frac{V_0^2}{2}&=p_0-p_{\rm s}\\ V_0&=\sqrt{\frac{2\left(p_0-p_{\rm s}\right)}{\rho}}\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

其中，p_0为总压；$p_{\rm s}$为测速位置的静压；V_0为所测速度。

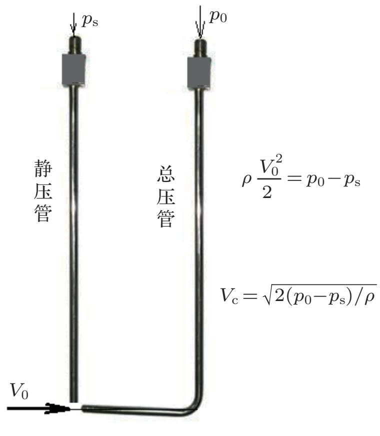

图6 毕托总压管(伯努利方程应用)

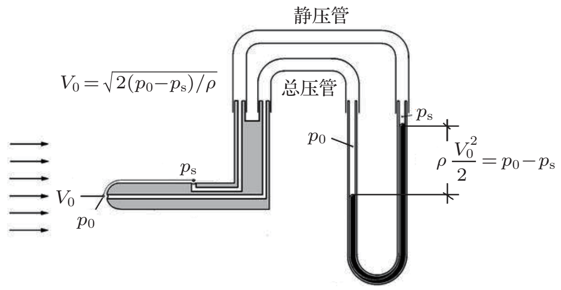

图 7　普朗特风速管 (皮托管测速仪)

2.4　文丘里流量计与一元管流理论建立 [2]

1797 年意大利物理学家文丘里 (Venturi GB，1746—1822) 通过对变截面管道实验，发现最小截面处速度增大、压强减小 (文丘里效应)，提出利用这一效应和连续条件测量管道流体流量的收缩扩张型管道，即文丘里管 (如图 8 所示)。其基本原理 (如图 9 所示) 是：对于通过理想不可压缩流体的水平管道，如果在管道中插入一段先收缩后扩张的管段，根据文丘里效应，建立管道收缩前 1 断面和收缩后 2 断面之间的伯努利方程，并利用连续性条件，可得管道通过的体积流量，即

$$p_1+\rho\frac{V_1^2}{2}=p_2+\rho\frac{V_2^2}{2},\quad Q=V_1A_1=V_2A_2 \tag{6}$$

其中，Q 为流量；V_1, p_1, A_1 分别为为截面 1 处速度，所测压强，截面积；V_2, p_2, A_2 分别为为截面 2 处速度，所测压强，截面积。

以后所发展的一元管流和一元总流理论都是基于一元流伯努利方程和连续方程得到的。

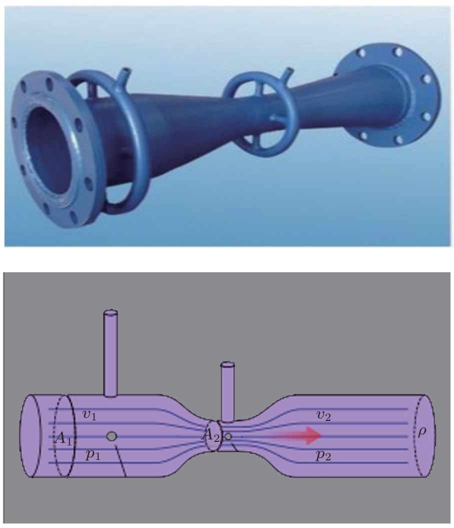

图 8　文丘里流量管

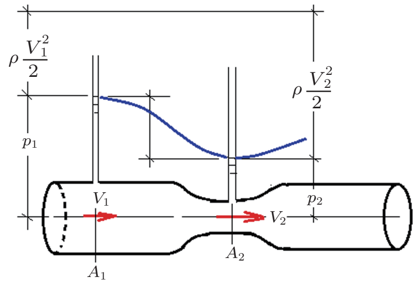

图 9　文丘里流量计原理 (伯努利方程在管流中的应用)

2.5　翼型绕流原理

1687 年，英国科学家牛顿 (Isaac Newton，1642—1727) 在其著的《自然哲学之数学原理》中首次提出作用于翼型上的升力或阻力与速度平方、空气密度和翼型弦长成正比 [1]，后人在此基础上写成如下的表达式 [3]，即

$$L=\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 bC_{\rm L},\quad D=\frac{1}{2}\rho V_\infty^2 bC_{\rm D} \tag{7}$$

其中，L 和 D 为升力和阻力；V_∞ 为飞行速度；b 为翼型弦长；$C_{\rm L}$ 和 $C_{\rm D}$ 为升力系数和阻力系数；ρ 为空气的密度。牛顿根据作用力与反作用力原理，提出所谓的 “漂石理论” (skipping stone theory)，认为翼型所受的升力是翼型下翼面对气流的顶托作用的结果，与上翼面无关 (如图 10 所示)，风洞实验表明，下翼面顶托作用所产生的升力只占总升力的 30%。

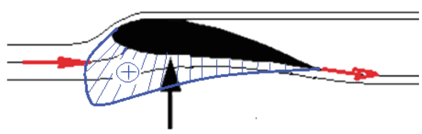

图 10　牛顿的漂石理论 (下翼面的顶托作用)

1738 年伯努利提出理想流体能量方程式后，为正确认识翼型升力提供了理论基础，特别是由能量定理得出，翼型所受的升力大小不仅与下翼面作用的空气顶托力有关，也与上翼面的吸力有关 (如图 11 所示)，后来的风洞实验证实，这个上翼面吸力约占翼型总升力的 70%。在翼型绕流中，由连续性条件，绕过上翼面的空气速度大于来流速度，根据伯努利方程得出上翼面的压强小于大气压强，因此上翼面将受到周围空气的吸力，由此会产生向上的升力，致使翼型绕流产生升力得到较为好的解释。翼面上的压强系数定义为

$$C_{\rm p}=\frac{p-p_\infty}{\dfrac{1}{2}\rho V_\infty^2}=1-\left(\frac{V}{V_\infty}\right)^2 \tag{8}$$

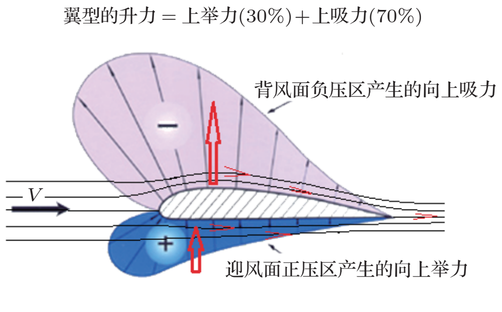

图 11 翼型压力分布及其对升力的贡献

3 伯努利方程的理论推广

由伯努利提出的局部跟随流体质点的建模思想，被欧拉概括为描述流体微团运动的流场法，并引入微积分原理，建立了表征理想流体运动的微分方程组 (欧拉方程组)，然后通过积分，欧拉方程组又再现了伯努利方程，但使用条件得到进一步推广，从而使伯努利方程与欧拉方程组构成了一个完整的理论体系，即理想流体力学理论的建立。在此基础上，进一步引入黏性的影响，建立了表征黏性流体运动的微分方程组 (即 N–S 方程组)，从而将理想流体力学理论推广到黏性流体运动中，并由 N–S 方程组沿流线积分，建立了考虑黏性损失的伯努利方程。这些理论的建立为湍流、边界层理论、气动噪声等理论的提出与发展奠定了坚实的基础，如图 12 所示的框图说明。

3.1 理想流体运动微分方程组 (Euler 方程组)

瑞士数学家与流体力学家欧拉 (Leonhard Euler，1707—1783) 师从瑞士数学家约翰·伯努利 (Johann Bernoulli，1667—1748)，后与其子丹尼尔·伯努利合作从事数学和流体力学的研究。

1753 年，欧拉基于伯努利局部跟随流体质点的建模思想，提出了连续介质假设；1755 年，欧拉基于伯努利建立能量方程局部跟踪流体质团运动的思想，提出描述流体运动的流场法即欧拉法 (空间点法)，并基于连续介质假设和理想流体模型，利用动量守恒定理建立了理想流体运动的微分方程组，即著名的欧拉方程组 (Euler 方程组)。

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\\&\quad f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\&\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\\&\quad f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\&\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\\&\quad f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

其中，u,v,w 分别为质点的速度分量；f_x，f_y，f_z 分别为作用于质点上的单位质量力；p 为质点压强。该微分方程组清楚地表明，改变流体微团运动行为的是作用于微团上的质量力和微团表面上的压强力。也就是说，如果不考虑质量力，沿着某个方向无压力梯度，则沿该方向流体质点的速度保持不变。写成矢量形式为 [5]

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p\tag{10}$$

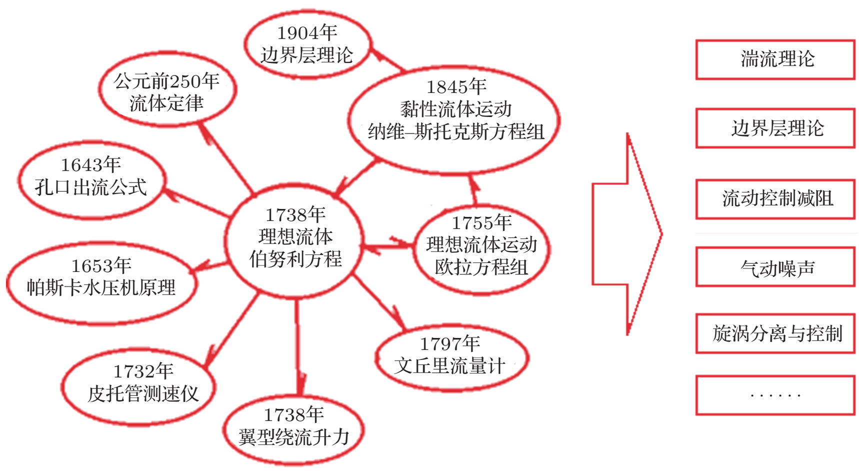

图 12 流体力学基础理论建立与发展

对于质量力有势、理想不可压缩流体的定常流动，沿着流线积分欧拉方程组，可得到伯努利方程。进一步分析发现，伯努利方程不仅沿着同一条流线成立，沿着同一条涡线、势流场、螺旋流场均成立。可见，由欧拉方程微分组积分得到的伯努利方程，在使用上更具有普适性。

3.2 黏性流体运动微分方程组 (Navier–Stokes 方程组)

鉴于理想流体运动的欧拉方程组，无法求解物体绕流的阻力问题，为此需要研究黏性对流体运动的影响。经 1822 年法国工程师纳维 (Claude-Louis Navier，1785—1836)、1829 年法国科学家泊松 (Simeon–Denis Poisson，1781—1840)、1843 年法国流体力学家圣维南 (Adhémar Jean Claude Barré de Saint–Venant，1797—1886)，最后由 1845 年英国科学家斯托克斯 (George Gabriel Stokes，1819—1903) 在剑桥大学三一学院提出应力变形率的三大关系，推广了牛顿内摩擦定律，完成了牛顿黏性流体运动微分方程组的推导，即著名的纳维斯托克斯 (Navier–Stokes) 方程组，简称 N–S 方程组，即 [4]

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}=\\&f_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\Delta u\\&\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}=\\&\quad f_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\Delta v\\&\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\\&\quad f_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\Delta w\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

其中，u, v, w 分别为质点的速度分量；f_x, f_y, f_z 分别为作用于质点上的单位质量力；p 为作用于质点上的压强；ν 为流体运动黏性系数；Δ 为拉普拉斯算子。写成矢量形式为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}-\frac{1}{\rho}\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{V}\tag{12}$$

这个方程组表明，导致流体微团加速度的变化，是作用于流体微团上的质量力、压强差力 (表面法向力) 和黏性力 (表面切向力) 的合力作用的结果。如果沿某方向这个合力为零，则流体微团沿着该方向的加速度也为零。

至此，从 1755 年欧拉导出理想流体运动方程组到 1845 年建立的黏性流体运动 N–S 方程组，历时 90 年，数学家们为流体力学基础理论的建立做出了卓越贡献。对于质量力只有重力、不可压缩黏性流体的定常流动，沿着流线积分 N–S 方程组，可得到类似于理想流体的伯努利方程，但在能量方程中多了一项因克服黏性摩擦力做功而损失的机械能项。即

$$z_1+\frac{p_1}{\gamma}+\frac{V_1^2}{2g}=z_2+\frac{p_2}{\gamma}+\frac{V_2^2}{2g}+\Delta h_{f1-2}\tag{13}$$

$$\Delta h_{f1-2}=\int_1^2\frac{\nu}{g}(-\Delta u\mathrm{d}x-\Delta v\mathrm{d}y-\Delta w\mathrm{d}z)\tag{14}$$

与理想流体伯努利方程相比，上式右边多出的项表示单位重量流体质点克服黏性应力做功所消耗的机械能，这一项不可能再被流体质点机械运动所利用，故称其为单位重量流体质点的机械能损失，这个损失与积分路径 (流线的形状) 有关。由表征黏性流体流动的伯努利方程 (式 (13)) 表明：在黏性流体流动中，沿同一条流线上单位重量流体质点所具有的机械能沿着流动方向总是减小的 (如图 13 所示)，不可能保持守恒 (理想流体流动时，总机械能保持守恒，无机械能损失)，流体总是从机械能大的地方流向机械能小的地方。以后在 N–S 方程组的基础上，进一步发展了边界层理论、流动控制、气动噪声等基本理论。

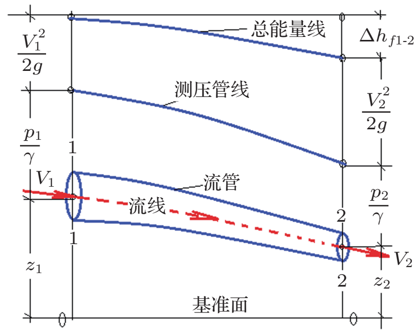

图 13　黏性流体运动的伯努利方程

4 总结

综上所述，伯努利方程的提出为流体力学理论的形成奠定了坚实的基础，对流体运动具有普适性，准确地建立了流体运动的速度和压强的定量关系，并迅速地被应用在流体机械工程中，该方程的应用与推广构成了流体力学和空气动力学的主体理论的建立与发展。同时，由伯努利提出的局部跟随流体质点的建模思想，被欧拉概括为描述流体运动的流

场法，在流体力学中得到普遍应用，是建立欧拉方程组、N–S 方程组以及后来的湍流、边界层理论、气动噪声等理论的基本依据和基础。

参 考 文 献

1 刘沛清. 流体力学通论. 北京: 科学出版社, 2017
Liu Peiqing. Fluid Mechanics Biography. Beijing: Science Press, 2017 (in Chinese)

2 刘大有. 伯努利方程应用中的若干问题. 力学与实践, 1991, 13(4): 62-63.

3 约翰 D 安德森. 空气动力学基础. 北京: 航空工业出版社, 2010
Anderson JD. Fundamentals of Aerodynamics. Beijing: Aviation Idustry Press, 2010 (in Chinese)

4 吴望一. 流体力学 (上册). 北京: 北京大学出版社, 1982
Wu Wangyi. Fluid Mechanics (Volume 1). Beijing: Peking University Press, 1982 (in Chinese)

5 章梓雄, 董曾南. 黏性流体力学, 第 2 版. 北京: 清华大学出版社, 2011
Zhang Zixiong, Dong Zengnan. Viscous Fluid Mechanics, 2nd edn. Beijing: Tsinghua University Press, 2011 (in Chinese)

(责任编辑: 胡 漫)