

第十届全国周培源大学生力学竞赛（个人赛）

详细参考解答及评分标准

出题学校： 山东科技大学

评分总体原则

各题均不限制方法。若方法与本文不同，只要结果和主要步骤正确，即给全分；若方法不同而结果不正确，各地自行统一酌情给分。本文中多处用图形解释，若试卷中未出现相应图形但已表达了同样的意思，则同样给分。计算结果用分数或小数表达均可。

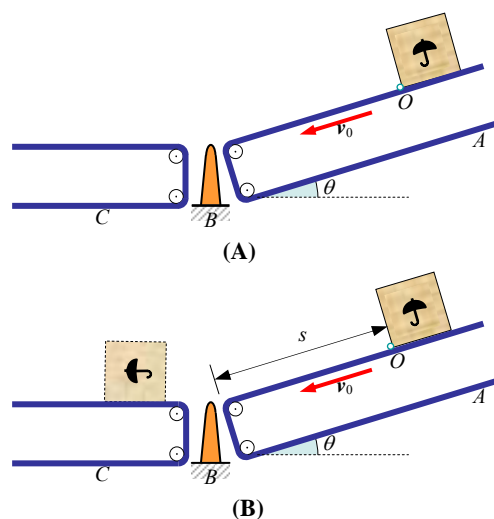
本文中用浅黄色标识的公式和文字是给分的关键点，其后圆圈内的数字仅为本处的所得分值。

第 1 题（30 分）

某工厂利用传送带运输边长为 b 的均质正方体货箱。已知货箱质量为 m ，绕自身中心轴的转动惯量为 J ，并且 $6J = mb^2$ ，传送带 A 倾角为 θ ($\theta < 45^\circ$)，速度为 v_0 ，传送带 C 水平放置， B 处为刚性支承。考虑货箱与传送带之间的摩擦，设两者之间的静摩擦因数为 f_s ，动摩擦因数为 f ，并且 $0 < f < 1$ 。

(1) 若货箱在 O 处由静止轻轻放在传送带 A 上，如图 (A) 所示，试判断货箱在到达刚性支承 B 之前是否会翻倒，并论证你的结论。

(2) 当货箱运动到传送带 A 底部时，其角部恰好与刚性支承 B 的顶端发生撞击，假设撞击过程为完全非弹性碰撞，货箱能顺利翻过刚性支承 B 到达传送带 C ，如图 (B) 所示，则释放点 O 到传送带 A 底部的位置 s 应该满足什么条件？（忽略两个传送带之间的距离）



题 1 图

解答及评分标准

(1) **（本小题 12 分）** 首先分析货箱在传送带上的运动。

由于货箱静止放置在传送带上，而传送带具有速度 v_0 ，所以初始运动阶段，货箱相对于传送带产生滑动。该阶段货箱受力如图 1-a(A) 所示，图中 G 为货箱重力， F 为摩擦力， F_N 为传送带给货箱的法向反力， a_1 为货箱在初始加速阶段的加速度。

由质心运动定理，

$$ma_1 = G \sin \theta + F, \quad (1-1a)$$

$$F_N - G \cos \theta = 0. \quad (1-1b)$$

式中， $F = fF_N$ 。由式 (1-1) 得货箱质心的加速度

$$a_1 = g(\sin \theta + f \cos \theta). \quad \textcircled{1} \quad (1-2)$$

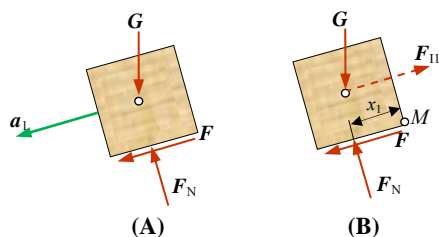


图 1-a

当货箱与传送带同速的瞬间，二者相对静止，无滑动摩擦。货箱的最大静摩擦力

$$F_{\max} = f_s F_N = f_s G \cos \theta . \quad (1-3)$$

此后，若货箱重力沿斜面向下的分量 $G \sin \theta$ 大于该静摩擦力，货箱还将继续向下做加速运动，并且受力如图 1-b(A) 所示，此时满足

$$G \sin \theta > f_s G \cos \theta . \quad (1-4)$$

由上式解得

$$\theta > \arctan f_s . \quad (1-5)$$

按照上述方法求解得该阶段货箱的加速度

$$a_2 = g(\sin \theta - f \cos \theta) . \quad (1-6)$$

当 $\theta \leq \arctan f_s$ ，货箱与传送带同速后将一起以速度 v_0 作匀速运动。

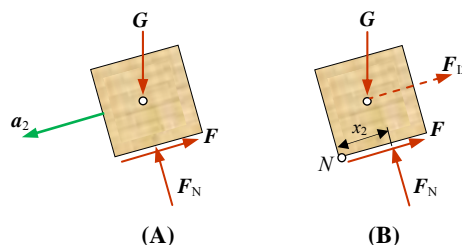


图 1-b

再分析货箱是否会倾倒。 货箱相对于传送带滑动过程中，可能存在两种倾倒情况：初始加速阶段绕右下角 M 点倾倒，或同速后再次加速阶段绕左下角 N 点倾倒 ②。在货箱上考虑惯性力，记货箱在上述两种情况下的惯性力分别为 F_{11} 和 F_{12} ，利用达朗贝尔原理求解。如果考生只考虑了一种货箱可能翻倒的情况，此处只给 ① 分。

首先分析货箱绕右下角 M 点倾倒情况。设 F_N 距 M 点距离为 x_1 ，如图 1-a(B) 所示，根据达朗贝尔原理，

$$\sum M_M(\mathbf{F}) = 0, \quad G \sin \theta \frac{b}{2} + G \cos \theta \frac{b}{2} - F_{11} \frac{b}{2} - F_N x_1 = 0, \quad (1-7a)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - G \cos \theta = 0 . \quad (1-7b)$$

式中， $F_{11} = ma_1 = G(\sin \theta + f \cos \theta)$ 。 (1-8)

由式 (1-7)、(1-8) 得

$$x_1 = (1-f) \frac{b}{2} . \quad (1-9)$$

再分析货箱绕左下角 N 点倾倒情况。设 F_N 距 N 点距离为 x_2 ，如图 1-b(B) 所示，同样有

$$\sum M_N(\mathbf{F}) = 0, \quad G \sin \theta \frac{b}{2} - G \cos \theta \frac{b}{2} - F_{12} \frac{b}{2} + F_N x_2 = 0, \quad (1-10a)$$

$$\sum F_y = 0, \quad F_N - G \cos \theta = 0, \quad (1-10b)$$

式中， $F_{12} = ma_2 = G(\sin \theta - f \cos \theta)$ 。 (1-11)

利用式 (1-10)、(1-11) 得

$$x_2 = (1-f) \frac{b}{2} . \quad (1-12)$$

由于 $0 < f < 1$ ，所以式 (1-9) 和式 (1-12) 满足

$$b > x_1 > 0, \quad b > x_2 > 0 . \quad (1-13)$$

即货箱在传送带 A 上运动时不会翻倒。① 如果考生只分析了一种货箱可能翻倒的情况，但仍然得出“不会翻倒”这一结论，则此处不给分。

(2) (本小题 18 分) 设货箱运动到底部与钢支承 B 撞击之前质心速度为 v_1 。货箱从 O 点开始运动，直到到达传送带 C 整个运动过程分三个阶段。第一阶段：从 O 点运动到传送带底部并获得速度 v_1 ；第二阶段：撞击刚性支承 B ；第三阶段：撞击后货箱运动到传送带 C 。

先分析撞击过程。由于货箱和支承 B 碰撞过程为完全非弹性，所以撞击后货箱不会弹起，而是绕着碰撞点 B 作转动 ①，碰撞前后质心速度方向发生突变。设碰撞后货箱质心速度为 v_2 ，角速度为 ω_2 ，碰撞前后的速度方向及碰撞冲量如图 1-c 所示。

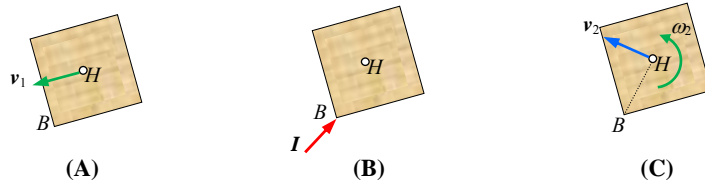


图 1-c

由图 1-c(B)，碰撞冲量满足

$$\sum M_B(I) = 0, \quad (1-14)$$

所以撞击前后货箱对 B 点的动量矩守恒，即

$$mv_1 \frac{b}{2} = mv_2 \frac{\sqrt{2}}{2} b + J\omega_2 \quad (2) \quad (1-15)$$

式中，碰撞后速度 $v_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} b\omega_2$ ， $J = \frac{1}{6} mb^2$ 为货箱相对于质心的转动惯量。将两式代入式 (1-15) 可得撞击后货箱的角速度

$$\omega_2 = \frac{3v_1}{4b}。 \quad (2) \quad (1-16)$$

再分析撞击后货箱的运动。由于碰撞结束后货箱运动过程中只有重力做功。故可利用机械能守恒求解。撞击结束瞬间，如图 1-d(A)所示，货箱的动能

$$T_2 = \frac{1}{2} mv_2^2 + \frac{1}{2} J\omega_2^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\sqrt{2}}{2} b\omega_2 \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} mb^2 \right) \omega_2^2 = \frac{1}{3} mb^2 \omega_2^2 \quad (2) \quad (1-17)$$

选取 B 点为零势能点，则在该位置货箱势能

$$V_2 = Gh_2。 \quad (1-18)$$

只有货箱跨过图 1-d(B)位置，才能到达传送带 C ，设该位置货箱的动能为 T_3 ，撞击后，货箱能翻到传送带 C 的条件是 $T_3 \geq 0$ ①。货箱的势能为

$$V_3 = Gh_3。 \quad (1-19)$$

根据机械能守恒定律

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3。 \quad (1-20)$$

将式 (1-17)~ (1-19) 代入上式得

$$\frac{1}{3} mb^2 \omega_2^2 + Gh_2 = T_3 + Gh_3。 \quad (1) \quad (1-21)$$

由上式解得

$$T_3 = \frac{1}{3} mb^2 \omega_2^2 + G(h_2 - h_3)。 \quad (1-22)$$

因此，要满足 $T_3 \geq 0$ ，需有

$$\omega_2^2 \geq \frac{3g}{b^2} (h_3 - h_2)。 \quad (1) \quad (1-23)$$

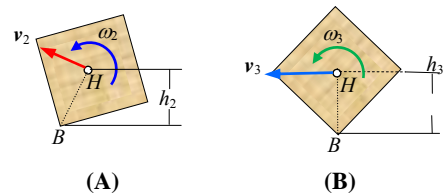


图 1-d

从图 1-d 中易求得 $h_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} b \sin(45^\circ + \theta)$, $h_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} b$ 。将以上各式连同式 (1-16) 代入式 (1-23), 得货箱能够达到传送带 C 的条件是

$$v_1^2 \geq \frac{8\sqrt{2}}{3} gb [1 - \sin(45^\circ + \theta)], \quad (1-24)$$

即货箱滑到底部, 与刚支承 B 碰撞前至少具有如下速度

$$v_{1\min} = \frac{2}{3} \sqrt{6\sqrt{2} gb [1 - \sin(45^\circ + \theta)]}。 \quad (1-25)$$

最后分析撞击前货箱能达到该最小速度的条件。

由问题 (1) 可知, 当 $\theta \leq \arctan f_s$, 货箱与传送带同速后, 将以速度 v_0 作匀速运动, 此时若 $v_0 > v_{1\min}$, 则货箱释放点位置应满足

$$s_{\min} = \frac{v_{1\min}^2}{2a_1} = \frac{4\sqrt{2}b [1 - \sin(45^\circ + \theta)]}{3(\sin \theta + f \cos \theta)}。 \quad (1-26)$$

若 $v_0 < v_{1\min}$, s 不管取何值, 均无法满足要求。①

当 $\theta > \arctan f_s$, 货箱与传送带同速后还将继续向下作加速运动, 此时若 $v_0 \geq v_{1\min}$, 则货箱速度未与传送带同步之前已经达到 $v_{1\min}$, s 的表达式同式 (1-26) ①; 若 $v_0 < v_{1\min}$, 则货箱与传送带同速之后还需继续向下运动直至速度达到 $v_{1\min}$, 并且

$$s = s_1 + s_2 = \frac{v_0^2}{2a_1} + \frac{v_{1\min}^2 - v_0^2}{2a_2}。 \quad (1-27)$$

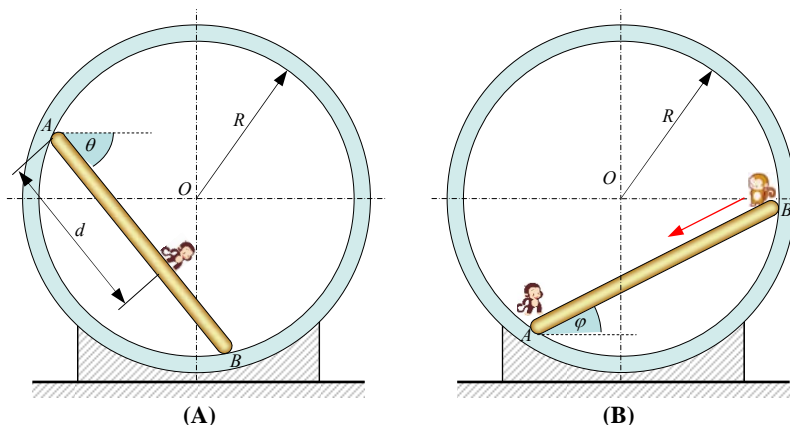
将式 (1-2)、式 (1-6) 和式 (1-25) 代入得

$$s_{\min} = \frac{4\sqrt{2}b [1 - \sin(45^\circ + \theta)]}{3(\sin \theta - f \cos \theta)} - \frac{f \cos \theta v_0^2}{g(\sin^2 \theta - f^2 \cos^2 \theta)}。 \quad (1-28)$$

第 2 题 (25 分)

动物园要进行猴子杂技表演, 训猴师设计了如下装置: 在铅垂面内固定一个带有光滑滑槽, 半径为 R 的圆环, 取一根重为 P , 长为 $l = \sqrt{3}R$ 的均质刚性杆 AB 放置在圆环滑槽内, 以便重为 Q 的猴子沿杆行走, 已知 $P = 2Q$ 。

(1) 如图 (A) 所示, 试求猴子处于距杆 AB 端点 A 距离为 d 时, 杆的平衡位置? (用杆 AB 与水平线的夹角 θ 表示)



题 2 图

(2) 设两只重量均为 Q 的猴子同时进行训练。训猴师首先让猴甲静坐在杆 AB 的 A 端，并且使猴甲-杆系统处于平衡，然后让猴乙从杆的 B 端无初速的沿杆向猴甲运动，如图 (B) 所示。试问猴乙应该如何走法才能不破坏原猴甲-杆系统的平衡状态？

解答及评分标准

(1) (本小题 10 分) **解法一：** 采用分析静力学方法，利用虚位移原理寻求猴-杆系统的平衡位置。建立坐标系如图 2-a 所示，用 K 表示猴子的位置。由于 A 、 B 处为理想约束，约束力 N_A 和 N_B 在相应的虚位移不做功，系统只有重力做功。设 AB 杆的质心为 C ，则圆心 O 到杆 AB 质心 C 的距离

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \sqrt{OA^2 - AC^2} = \sqrt{OA^2 - AC^2} \\ &= \sqrt{R^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}R\right)^2} = \frac{1}{2}R。 \end{aligned}$$

显然，在 $\triangle OAC$ 中， $\angle OAC = 30^\circ$ ，所以质心 C 坐标

$$y_C = R - R\sin(\theta - 30^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}R\sin\theta。 \quad (2-1)$$

猴 K 的坐标

$$y_K = R - R\sin(\theta - 30^\circ) + d\sin\theta。 \quad (2-2)$$

将式 (2-1) 和 (2-2) 分别取变分得

$$\delta y_C = \left[-R\cos(\theta - 30^\circ) + \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\theta \right] \delta\theta, \quad (2-3a)$$

$$\delta y_K = \left[-R\cos(\theta - 30^\circ) + d\cos\theta \right] \delta\theta。 \quad (2-3b)$$

根据虚位移原理，猴-杆系统平衡时有

$$P\delta y_C + Q\delta y_K = 0。 \quad (2-4)$$

将式 (2-3) 代入得

$$\frac{\cos\theta}{\cos(\theta - 30^\circ)} = \frac{3R}{\sqrt{3}R + d}。 \quad (2-5)$$

或
$$\tan\theta = \frac{2d - \sqrt{3}R}{3R}。$$

解法二： 采用刚体静力学方法，直接列平衡方程求解。系统受力如图 2-b 所示，建立图示坐标系，垂直于杆方向为 x 轴，沿 AB 轴方向为 y 轴。用 K 表示猴子的位置。对系统列平衡方程，

$$\begin{aligned} \sum F_x &= 0, \\ (N_A + N_B)\cos 60^\circ - (P + Q)\cos\theta &= 0, \\ \sum F_y &= 0, \\ (N_A - N_B)\cos 30^\circ + (P + Q)\sin\theta &= 0, \end{aligned}$$

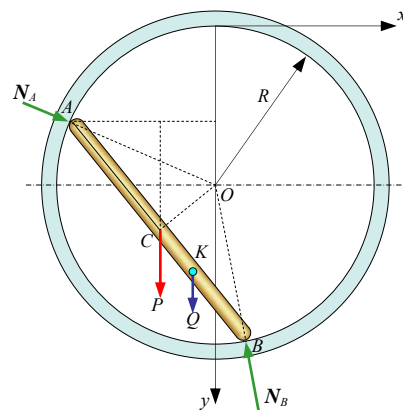


图 2-a

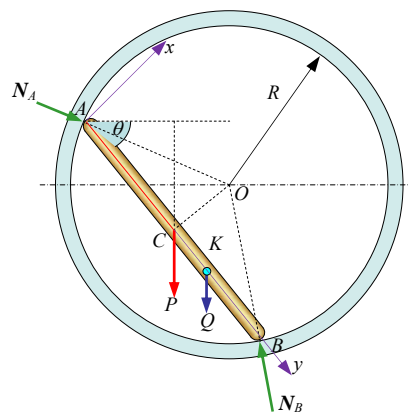


图 2-b

$$\sum M_A(F) = 0,$$

$$N_B l \cos 60^\circ - P \cdot \frac{l}{2} \cos \theta - Qd \cos \theta = 0,$$

由上面第一式和第二式得

$$N_B = 3Q \left(\cos \theta + \frac{\sin \theta}{\sqrt{3}} \right).$$

代入第三式得

$$\tan \theta = \frac{2d - \sqrt{3}R}{3R}.$$

(2) (本小题 15 分) 根据第 (1) 题的结论, 当猴甲静坐在杆 A 端时, $d = 0$, 代入式 (2-5) 可得猴甲-杆系统平衡时杆的初始位置角 $\varphi_0 = 30^\circ$. 取 B 点为原点, s 轴沿 BA 方向, 设猴乙的加速度为 \ddot{s} , 则作用在猴乙上的惯性力大小为

$$F_I = \frac{Q}{g} \ddot{s}. \quad (2-6)$$

当猴乙运动到杆上任意位置时其惯性力方向及系统受力如图 2-c 所示. 对猴-杆系统运用达朗贝尔原理,

$$\sum M_O(F) = 0,$$

$$F_I s \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 + F_I \sin \varphi_0 (R - s \cos \varphi_0) - Q(R - s \cos \varphi_0) + QR \sin(60^\circ - \varphi_0) - P \frac{R}{2} \sin \varphi_0 = 0. \quad (2-7)$$

将式 (2-6) 代入整理得

$$\ddot{s} + \frac{\sqrt{3}g}{R} s = 2g. \quad (2-8)$$

上式即为保持原猴甲-杆系统平衡状态不变的情况下, 猴乙的运动应满足的微分方程. 上式对应的齐次方程的通解为

$$s_1 = A \cos \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{R}} t + B \sin \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{R}} t, \quad (2-9)$$

易知微分方程 (2-8) 的一个特解可取为 $s_2 = C$, 代入式 (2-8) 可得

$$s_2 = C = \frac{2\sqrt{3}R}{3}. \quad (2-10)$$

故微分方程 (2-8) 的通解为

$$s = s_1 + s_2 = A \cos \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{R}} t + B \sin \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{R}} t + \frac{2\sqrt{3}R}{3}. \quad (2-11)$$

式中, A 和 B 为积分常数, 可由初始条件确定. 当 $t = 0$ 时, 猴乙在杆的 B 端, 而且初速度为 0, 所以初始条件为: 当 $t = 0$ 时,

$$s = 0, \quad \dot{s} = 0. \quad (2-12)$$

利用上述条件, 可求得积分常数

$$A = -\frac{2\sqrt{3}R}{3}, \quad B = 0. \quad (2-13)$$

将式 (2-13) 代入式 (2-11) 可得猴 B 的行走规律

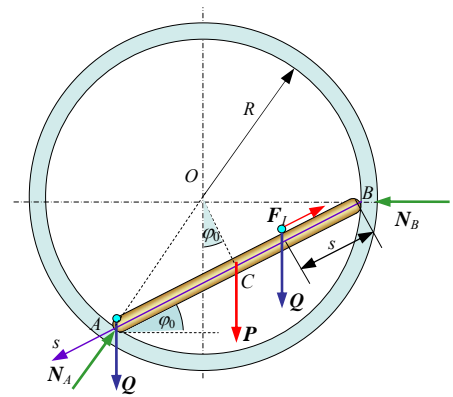


图 2-c

$$s = \frac{2\sqrt{3}R}{3} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{R}t} \right) \quad (2-14)$$

即猴乙按照上述规律运动时，不会破坏原猴甲-杆系统的平衡状态。

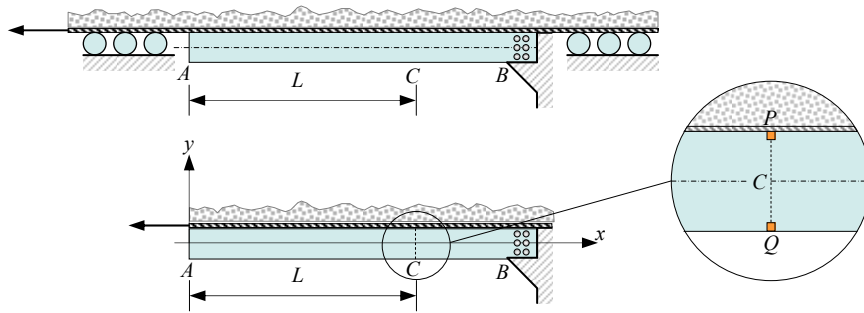
第3题 (30分)

如图传送装置中， AB 是一段横截面为矩形的梁， A 端自由， B 端固定。截面宽度为 b ，高度为 h ($h > 2b$)。弹性模量为 E ，泊松比为 ν 。设传送带连同带上分布均匀的散装物在单位长度上的重量为 q ，传送带给予 AB 梁单位长度的切向作用力为 t 。建立图示的坐标系，考虑离 A 端为已知长度 L ($L > 5h$) 的 C 截面，假定该截面中水平直线上的切应力均匀分布。

(1) 若 q 和 t 为已知，试确定 C 截面的上边缘 P 点和下边缘 Q 点的应力状态，画出单元体示意图，并写出各应力分量的表达式。

(2) 若 q 和 t 为已知，试求 C 截面上切应力的表达式。

(3) 事实上， q 和 t 的数值不易直接得到。为了用电测法测定 q 和 t 的具体数值，拟在 C 截面所在区域且垂直于 C 截面的外表面上贴应变片。暂不考虑温度补偿片及组桥连接等事宜，先设计一个贴片最少的方案，并说明如何利用这些应变片的读数来求得 q 和 t 的数值。



题3图

解答及评分标准

(1) (本小题6分) AB 部分可简化为上表面承受均布的竖向荷载 q 和切向荷载 t 的悬臂梁，如图 3-a 所示。在梁中截取坐标为 x 的截面，如图 3-b 所示。由平衡条件可导出，该截面上各内力分量为 (注意，所有已知量按实际方向画出，所有待求量按正向画出)

$$F_N = tx, \quad F_S = -qx, \quad M = -\frac{1}{2}qx^2 - \frac{ht}{2}x \quad (3-1)$$

截面上的正应力由拉伸应力 σ_N 和弯曲应力 σ_M 构成。对于坐标为 x 的截面上坐标为 y 的点，

$$\sigma_N = \frac{F_N}{A} = \frac{tx}{bh}, \quad \sigma_M = -\frac{My}{I} = \frac{6(qx^2 + ht)x}{bh^3}y,$$

$$\sigma_x = \sigma_N + \sigma_M = \frac{tx}{bh} + \frac{6(qx^2 + ht)x}{bh^3}y \quad (3-2)$$

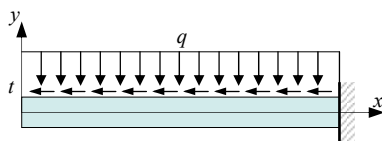


图 3-a

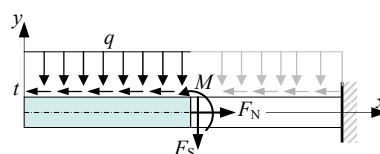


图 3-b

特别地，在 C 截面， $x=L$ 。其上边沿 P 点处， $y=\frac{h}{2}$ ，故

$$\sigma_x = \frac{tL}{bh} + \frac{3(qL^2 + htL)}{bh^2} = \frac{4htL + 3qL^2}{bh^2} \quad (3-3)$$

此外，易于由平衡条件得

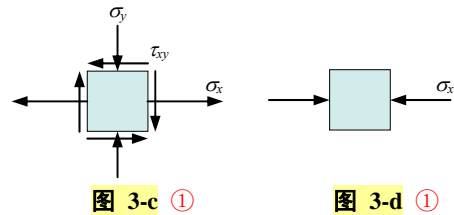
$$\sigma_y = -\frac{q}{b}, \quad \tau_{xy} = -\frac{t}{b} \quad \text{①}$$

此处的第二式若无负号，但单元体图正确，也给 ① 分。

P 点处于双向应力状态，其单元体示意图如图 3-c 所示。

在 C 截面下边沿 Q 点， $y=-\frac{h}{2}$ ，故

$$\sigma_x = \frac{tL}{bh} - \frac{3(qL^2 + htL)}{bh^2} = -\frac{2htL + 3qL^2}{bh^2} \quad (3-4)$$



由于梁的下表面是自由表面，故 $\sigma_y=0$ ， $\tau_{xy}=0$ 。 Q 点处于单向应力状态，其单元体示意图如图 3-d 所示。

(2) (本小题 10 分) 为了导出截面上任意处的切应力 τ 的一般表达式，在 C 截面附近截取梁中的一个微段 dx ，再截取其坐标为 y 的水平面以上直到上边沿的部分，如图 3-e 所示。其左截面（图中灰色区域）正应力的合力按照实际的方向（即图中所标识的方向）应为

$$F = \int_{A^*} \sigma dA = -\int_{A^*} \frac{M}{I} y dA + \int_{A^*} \frac{F_N}{A} dA$$

故有 $F = -\frac{M}{I} S^* + \frac{F_N}{A} A^* \quad (3-5)$

式中， S^* 是图中灰色区域关于截面形心轴的静矩， A^* 是该区域的面积，即

$$S^* = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right), \quad A^* = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \quad (3-6)$$

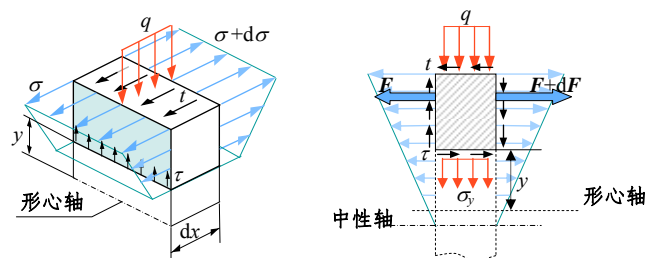


图 3-e

图 4-e 中右截面上的正应力的合力可记为 $(F + dF)$ 。

记微元区段左截面上坐标为 y 处的切应力为 $\tau(y)$ ，方向向上。根据切应力互等定理可知图 3-e 所示区域中，下截面上的切应力数值也为 τ ，且方向向右。由这个区域在 x 方向上的力平衡可得

$$-F - t dx + \tau b dx + (F + dF) = 0 \quad (3-7)$$

故有 $\tau = -\frac{1}{b} \frac{dF}{dx} + \frac{t}{b} = \frac{S^*}{bI} \frac{dM}{dx} - \frac{A^*}{bA} \frac{dF_N}{dx} + \frac{t}{b}$

将式 (3-1) 代入上式便可得

$$\tau = -\frac{S^*}{bI} \left(qx + \frac{ht}{2} \right) + \frac{t}{b} \left(1 - \frac{A^*}{A} \right).$$

将式 (3-6) 代入上式便可整理得

$$\tau(x, y) = -\left[\frac{3qx}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) + \frac{t}{4b} \left(1 - \frac{4y}{h} - \frac{12y^2}{h^2} \right) \right]. \quad (3-7a)$$

特别地, 在 C 截面上,

$$\tau = -\left[\frac{3qL}{2bh} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) + \frac{t}{4b} \left(1 - \frac{4y}{h} - \frac{12y^2}{h^2} \right) \right]. \quad (3-7b)$$

这就是所求的切应力的表达式。负号说明切应力的实际方向与图 3-e 所示方向相反。例如, 形心轴处 ($y=0$), 单元体的切应力方向如图 3-f 所示 (图中未标出正应力)。

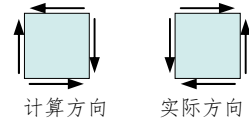


图 3-f

如果考生在图 3-e 中, 假设切应力 τ 的方向是向左的, 那么式 (3-7) 中就没有负号。

(3) (本小题 14 分) 在 C 截面所在区域的外表面中, 上表面有传送带覆盖, 贴应变片不大现实。故只有侧面和下表面比较合适。同时, 太靠近棱边的区域贴片, 可能导致数据不够真实, 也是应该避免的。

由于各应力分量沿 y 方向连续分布, 因此可以预料, 在截面上存在着应力分量 σ_x , σ_y 和 τ_{xy} 。其中 τ_{xy} 对沿坐标轴方向的线应变没有影响, 但对其他方向的线应变有影响, 因此, 如果所贴应变片是沿坐标轴方向的, 一枚沿轴向, 记为 $\varepsilon_{(1)} = \varepsilon_x$, 另一枚垂直于轴向, 记为 $\varepsilon_{(2)} = \varepsilon_y$, 那么, 由平面问题的广义胡克定律,

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x),$$

可得
$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \quad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x). \quad (3-8)$$

上式涉及正应力分量 σ_y , 这个分量可按下述方法进行分析。

在图 4-e 中, 根据式 (4-7a), 微段左截面上坐标为 y 的水平线以上的部分切应力的合力为

$$\begin{aligned} F_Q &= \int_y^{h/2} \tau \cdot b dy = -\int_y^{h/2} \left[\frac{3qx}{2h} \left(1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) + \frac{t}{4} \left(1 - \frac{4y}{h} - \frac{12y^2}{h^2} \right) \right] dy \\ &= -\frac{qx}{2} \left(1 - \frac{3y}{h} + \frac{4y^3}{h^3} \right) + \frac{ht}{8} \left(1 + \frac{2y}{h} - \frac{4y^2}{h^2} - \frac{8y^3}{h^3} \right). \quad (3-9) \end{aligned}$$

由 y 方向上的力平衡, 如图 4-e, 有

$$F_Q - q dx - (F_Q + dF_Q) - \sigma_y b dx = 0, \quad (1)$$

即得
$$\sigma_y = -\frac{q}{b} - \frac{1}{b} \frac{dF_Q}{dx} = -\frac{q}{b} + \frac{q}{2b} \left(1 - \frac{3y}{h} + \frac{4y^3}{h^3} \right),$$

即
$$\sigma_y(y) = -\frac{q}{2b} \left(1 + \frac{3y}{h} - \frac{4y^3}{h^3} \right). \quad (2) \quad (3-9)$$

这样, σ_x 和 σ_y 的一般表达式分别由式 (3-2) 和式 (3-9) 给出。

可在 C 截面区域的侧面的不同位置粘贴应变片, 从而构成不同的贴片方案。

第一种方案: 可选择在侧面中线的 K 处贴片, 如图 3-g 所示。在该处,

$$\sigma_x = \frac{tL}{bh}, \quad \sigma_y = -\frac{q}{2b} \quad \textcircled{2}$$

由式 (3-8) 可知,

$$\frac{tL}{bh} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{(1)} + \nu\varepsilon_{(2)}),$$

$$-\frac{q}{2b} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{(2)} + \nu\varepsilon_{(1)}),$$

故有 $t = \frac{Ebh}{L(1-\nu^2)}(\varepsilon_{(1)} + \nu\varepsilon_{(2)}), \quad \textcircled{1} \quad (3-10a)$

$$q = -\frac{2Eb}{1-\nu^2}(\varepsilon_{(2)} + \nu\varepsilon_{(1)}). \quad \textcircled{1} \quad (3-10b)$$

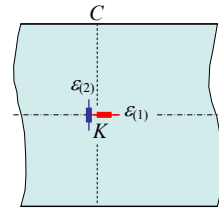


图 3-g

第二种方案: 可选择在侧面中线上方的 S 处贴片, S 处距中线 $\frac{h}{4}$, 如

图 3-h 所示。在该处,

$$\sigma_x = \frac{5htL + 3qL^2}{2bh^2}, \quad \sigma_y = -\frac{27q}{32b} \quad \textcircled{2}$$

由式 (3-8) 可知,

$$\frac{5htL + 3qL^2}{2bh^2} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{(1)} + \nu\varepsilon_{(2)}),$$

$$-\frac{27q}{32b} = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_{(2)} + \nu\varepsilon_{(1)}),$$

故有 $q = -\frac{32Eb}{27(1-\nu^2)}(\varepsilon_{(2)} + \nu\varepsilon_{(1)}), \quad \textcircled{1} \quad (3-11a)$

$$t = \frac{2bE}{5hL(1-\nu^2)} \left[\left(h^2 + \frac{16\nu}{9}L^2 \right) \varepsilon_{(1)} + \left(h^2\nu + \frac{16}{9}L^2 \right) \varepsilon_{(2)} \right]. \quad \textcircled{1} \quad (3-11b)$$

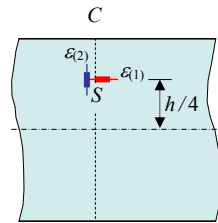


图 3-h

在第二种方案中, 贴片处与中线的距离可以不是 $\frac{h}{4}$ 。原则上, 到中线的距离远一些为好, 但应避免取 $\frac{h}{2}$ 。若考生所取距离不是 $\frac{h}{4}$, 只要算式正确, 均算全对。

注意: 如果考生没有求出 σ_y 的表达式, 直接考虑贴片, 那么, 应变片可用 3 片。以下的三种方案, 若算式都正确, 则本小题统一给 ⑥ 分。

第三种方案: 可选择在侧面中线的 K 处贴片, 并贴成如图 3-i 所示的直角应变花。由于在中线上, 与式 (3-10a) 相同,

$$t = \frac{Ebh}{L(1-\nu^2)}(\varepsilon_{(1)} + \nu\varepsilon_{(2)}).$$

由式 (3-7) 可知, 在 K 处的切应力按照其实际方向, 可写为

$$\tau_{xy} = \frac{6qL + ht}{4bh},$$

故有 $\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{(1+\nu)(6qL + ht)}{2Ebh}.$

在 K 处沿 45° 方向上的线应变

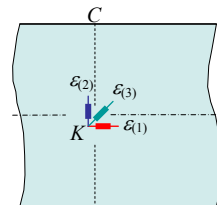


图 3-i

$$\varepsilon_{(3)} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)}) + \frac{1}{2}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}(\varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)}) + \frac{(1+\nu)(6qL + ht)}{4Ebh},$$

故有
$$q = -\frac{Ebh}{3L(1+\nu)} \left[\varepsilon_{(1)} + \varepsilon_{(2)} - 2\varepsilon_{(3)} + \frac{h}{2L(1-\nu)} (\varepsilon_{(1)} + \nu\varepsilon_{(2)}) \right].$$

第四种方案: 除了在中线 K 处沿坐标轴方向贴片之外, 再在底面沿轴向贴片, 如图 3-j 所示。应变片共计仍用 3 片。

与第一、第二种方案类似, 由 $\varepsilon_{(1)}$ 和 $\varepsilon_{(2)}$ 可得式 (3-10a):

$$t = \frac{Ebh}{L(1-\nu^2)} (\varepsilon_{(1)} + \nu\varepsilon_{(2)}).$$

在 C 截面所在底面处沿轴向贴一枚应变片 $\varepsilon_{(3)}$, 该处处于单向应力状态, 由式 (3-4) 可知,

$$E\varepsilon_{(3)} = -\frac{2htL + 3qL^2}{bh^2},$$

将式 (3-10a) 代入上式即可得

$$q = -\frac{Ebh^2}{3L^2} \left[\varepsilon_{(3)} + \frac{2(\varepsilon_{(1)} + \nu\varepsilon_{(2)})}{1-\nu^2} \right].$$

第五种方案: 在第四种方案中, 应变片 $\varepsilon_{(1)}$ 和 $\varepsilon_{(2)}$ 不一定要选择在侧面的中线 K 处, 也可选择在侧面的 S 处贴片, 该处的纵坐标为 y_0 , 如图 3-k 所示。由式 (3-2) 可知,

$$\sigma_x = \frac{tL}{bh} + \frac{6(qL^2 + htL)y_0}{bh^3},$$

即
$$\frac{tL}{bh} + \frac{6(qL^2 + htL)y_0}{bh^3} = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_{(1)} + \nu\varepsilon_{(2)}).$$

另外, 在 C 截面所在底面处沿轴向贴一枚应变片 $\varepsilon_{(3)}$, 与第四种方案相同,

$$E\varepsilon_{(3)} = -\frac{2htL + 3qL^2}{bh^2}.$$

上两式构成关于 t 和 q 的线性方程组, 联立求解可得

$$t = \frac{Ebh}{L} \left[\frac{\varepsilon_{(1)} + \nu\varepsilon_{(2)}}{1-\nu^2} + \frac{2y_0 \varepsilon_{(3)}}{h} \right] \left(1 + \frac{2y_0}{h} \right)^{-1},$$

$$q = -\frac{2Ebh^2}{3L^2} \left[\frac{\varepsilon_{(1)} + \nu\varepsilon_{(2)}}{1-\nu^2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{3y_0}{h} \right) \varepsilon_{(3)} \right] \left(1 + \frac{2y_0}{h} \right)^{-1}.$$

显然, 侧面的两枚应变片也可以贴在中线的下方。

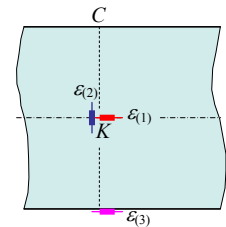


图 3-j

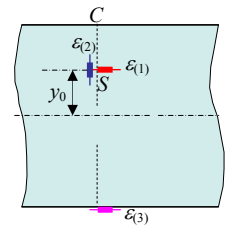


图 3-k

第 4 题 (35 分)

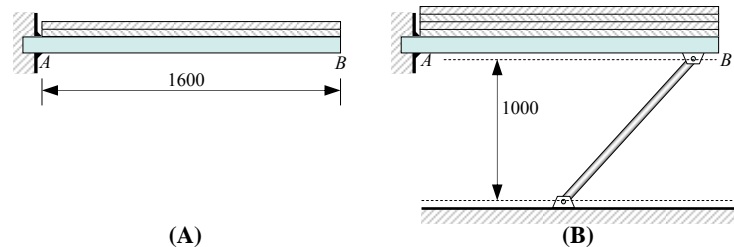
如图横梁的长度为 1600 mm, 横截面是底边 $b = 40$ mm, 高度 $h = 60$ mm 的矩形。梁的左端 A 为固支端, 右端 B 自由。材料性能常数 $E = 95$ GPa, 屈服极限 σ_s 和比例极限 σ_p 均为 250 MPa。今有一批质地均匀、每块重量为 3.2 kN、长度也为 1600 mm 的软金属板需要整齐地叠放在梁上, 如图 (A) 所示。现拟用一根长度为 1800 mm、直径 $d = 36$ mm、材料与横梁相同的圆杆来提高横梁的承载能力。限于条件, 只有梁下方 1000 mm 处的地基可以对圆杆提供支撑; 而且圆杆两端都只能用球铰与横梁和地基相连接。两个铰支座的水平位置可以根据需要分别随意调整, 圆杆的长度也可以

随之而任意截取，如题图 (B) 所示。

(1) 定性分析：如何使用这根圆杆，使之与横梁形成合理的结构，才能尽可能多地放置金属板？

(2) 不计横梁和圆杆的重量，根据问题 (1) 的要求，设横梁和圆杆的安全因数均为 $[n]=2$ ，设计和定量地计算这一结构。结果中长度精确到 0.1 mm 。

(3) 根据你的设计，加上支撑后的横梁最多可以堆放多少块金属板？



题 4 图

解答及评分标准

(1) (本小题 7 分) 横梁的右部增加一个斜撑，实际上增加了一个向上的力和向右的力。向上的力可以改善横梁的弯曲强度，故不可缺少。但向右的力使横梁产生拉弯组合变形，加大了横梁横截面上的最大正应力，故该项作用力对强度不利。若要完全消除向右的作用力，则圆杆应处于铅垂位置。另一方面，对斜撑而言，由于是受压杆，可能存在稳定问题。圆杆越长，稳定性越差。因此，圆杆处于铅垂位置具有最好的稳定性。所以，使圆杆处于铅垂位置是应该采用的方案。(关键词：铅垂放置③)

在圆杆处于铅垂的情况下，圆杆的左右位置的调整也是一个可以提高横梁强度的措施。(关键词：左右调整②)

同时，还可以将圆杆的长度取得比 1000 mm 略长，利用装配应力（即预应力）来提高横梁的强度。(关键词：装配应力②)

(2) (本小题 26 分) 金属板的重量可简化为作用在悬臂梁上的均布荷载 q 。记竖杆安置在距右端 B 为 a 的 C 处，把竖杆的支撑简化为向上的作用力 R ，其力学模型和弯矩图如图 4-a 所示。在这种情况下，弯矩存在着三个峰值，即位于 AC 之间的 M_K ， A 截面的 M_A ，以及 C 截面的 M_C 。要使横梁的强度得到充分利用，应有

$$M_K = -M_A = -M_C。 \quad (1) \quad (4-1)$$

以 B 端为原点， x 坐标向左。 C 截面的弯矩

$$M_C = -\frac{1}{2}qa^2。 \quad (1) \quad (4-2a)$$

在 C 截面左面，弯矩为

$$M(x) = R(x-a) - \frac{1}{2}qx^2 \quad (x \geq a),$$

其极值点 $x_K = \frac{R}{q}$ ，该截面的弯矩

$$M_K = \frac{R^2}{2q} - Ra。 \quad (1)$$

固定端 A 处的弯矩

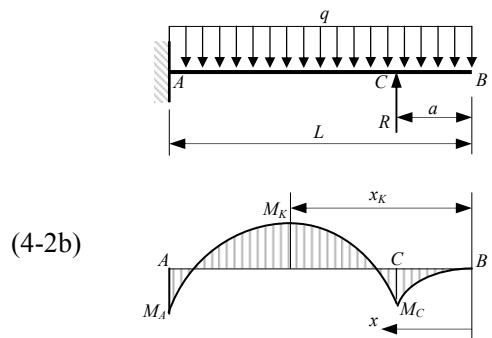


图 4-a

$$M_A = R(L-a) - \frac{1}{2}qL^2。 \quad \textcircled{1} \quad (4-2c)$$

式(4-2)的三式联立，即可解得

$$a = \frac{1}{7}(2\sqrt{2}-1)L = 417.926 \text{ mm}， \quad \textcircled{2} \quad (4-3a)$$

和
$$R = \frac{1}{2}q(L+a) = \frac{1}{7}(3+\sqrt{2})qL。 \quad \textcircled{2} \quad (4-3b)$$

故有
$$M_{\max} = \frac{1}{2}qa^2 = \frac{1}{98}(9-4\sqrt{2})qL^2。$$

由于横梁的抗弯截面系数 $W = \frac{1}{6}bh^2$ ，故强度条件是

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{3qL^2}{49bh^2}(9-4\sqrt{2}) \leq \frac{\sigma_s}{[n]}，$$

由此可得许用荷载

$$[q] = \frac{49bh^2\sigma_s}{3(9-4\sqrt{2})[n]L^2} = \frac{49 \times 40 \times 60^2 \times 250}{3 \times (9-4\sqrt{2}) \times 2 \times 1600^2} = 34.35 \text{ N/mm}。 \quad \textcircled{2} \quad (4-4)$$

相应地，C处的支承反力

$$R = 34659.90 \text{ N}。 \quad (4-5)$$

记横梁横截面惯性矩为 I_1 ，下面用不同的方法计算在 R 和 q 的共同作用下 C 处的挠度 w_C 。

方法一（叠加法）：C 处的挠度 w_C 可按图 4-b 所示的简化模型计算，即（向上为正）

$$\begin{aligned} w_C &= \frac{(R-qa)(L-a)^3}{3EI_1} - \frac{q(L-a)^4}{8EI_1} - \left(\frac{1}{2}qa^2\right)\frac{(L-a)^2}{2EI_1} \\ &= \frac{q}{24EI_1}(L^2-2La-5a^2)(L-a)^2 = \frac{q}{2Ebh^3}(L^2-2La-5a^2)(L-a)^2。 \quad \textcircled{6} \end{aligned} \quad (4-6a)$$

上式中代入 $a = 417.926 \text{ mm}$ ， $q = [q] = 34.35 \text{ N/mm}$ 等数据，可得

$$w_C = 10.214 \text{ mm}。 \quad \textcircled{1} \quad (4-6b)$$

或者： w_C 可以直接用 q 来表达。

$$\begin{aligned} w_C &= \frac{(R-qa)(L-a)^3}{3EI_1} - \frac{q(L-a)^4}{8EI_1} - \left(\frac{1}{2}qa^2\right)\frac{(L-a)^2}{2EI_1} \\ &= \frac{2(113-72\sqrt{2})qL^4}{7203EI_1} = \frac{24(113-72\sqrt{2})qL^4}{7203Ebh^3} \\ &= 3.1033 \times 10^{-3} \frac{qL^4}{EI_1} = 3.7240 \times 10^{-2} \frac{qL^4}{Ebh^3}。 \end{aligned}$$

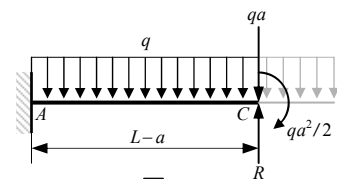


图 4-b

在上式中代入 $q = [q] = 34.35 \text{ N/mm}$ 等数据，即有

$$w_C = \frac{0.03724 \times 34.35 \times 1600^4}{95 \times 10^3 \times 40 \times 60^3} = 10.214 \text{ mm}。$$

或者： w_C 还可以直接代入数值计算。

$$EI_1 = \frac{1}{12}Ebh^3 = \frac{1}{12} \times 95 \times 10^3 \times 40 \times 60^3 = 6.84 \times 10^{10} \text{ N} \cdot \text{mm}^2，$$

$$\frac{(R-qa)(L-a)^3}{3EI_1} = 163.4267 \text{ mm}，$$

$$\frac{q(L-a)^4}{8EI_1} = 122.5700 \text{ mm},$$

$$\left(\frac{1}{2}qa^2\right)\frac{(L-a)^2}{2EI_1} = 30.6425 \text{ mm},$$

$$w_c = 163.4267 - 122.5700 - 30.6425 = 10.214 \text{ mm}.$$

方法二 (图乘法): 将原有荷载分解为如图 4-c 左方所示的三种荷载, 画出相应的弯矩图。同时, 在 C 处加上向上的单位力, 画出其弯矩图。各弯矩图如图 4-c 右方所示。故有:

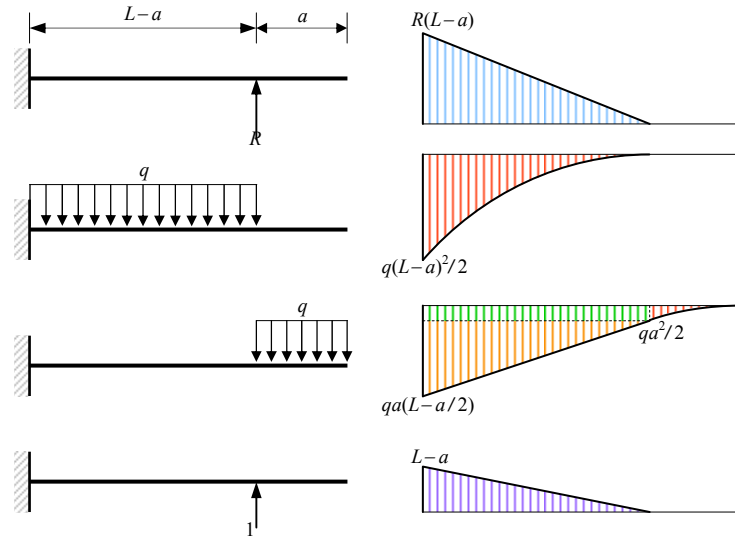


图 4-c

$$EI_1 w_c = \frac{1}{2} R(L-a) \cdot (L-a) \cdot \frac{2}{3} (L-a) - \frac{1}{3} \cdot \frac{q}{2} (L-a)^2 \cdot (L-a) \cdot \frac{3}{4} (L-a) - \frac{qa^2}{2} \cdot (L-a) \cdot \frac{1}{2} (L-a) - \frac{1}{2} \left[qa \left(L - \frac{a}{2} \right) - \frac{qa^2}{2} \right] \cdot (L-a) \cdot \frac{2}{3} (L-a),$$

故有 $w_c = \frac{(L-a)^2}{24EI_1} [8R(L-a) - q(3L^2 + 2La + a^2)]$ 。

将 $R = \frac{1}{2}q(L+a)$ 代入上式, 即可得

$$w_c = \frac{q}{24EI_1} (L^2 - 2La - 5a^2)(L-a)^2 = \frac{q}{2Ebh^3} (L^2 - 2La - 5a^2)(L-a)^2 = 10.214 \text{ mm}.$$

w_c 为正, 说明竖杆的长度应比基本长度 H 更长。记竖杆的长度为 $H^* = H + \Delta$, 竖杆的横截面积为 A_2 , 由于竖杆为压杆, 故有协调条件:

$$\frac{R(H + \Delta)}{EA_2} + w_c = \Delta, \quad (2)$$

故有 $\Delta = \left(\frac{RH}{EA_2} + w_c \right) \left(1 - \frac{R}{EA_2} \right)^{-1} = \left(\frac{RH}{EA_2} + w_c \right) \left(1 + \frac{R}{EA_2} + \dots \right) = \frac{RH}{EA_2} + w_c \quad (1)$

$$= \frac{4RH}{E\pi d^2} + w_c = \frac{4 \times 34659.9 \times 1000}{95 \times 10^3 \times \pi \times 36^2} + 10.214 = 10.572 \text{ mm}.$$

所以, 应取立柱高度

$$H^* = H + \Delta = 1010.57 \text{ mm}。 \textcircled{1} \quad (4-7)$$

下面校核立柱的安全性。由于立柱承受压力，故考虑其柔度。由已知， $\sigma_p = \sigma_s$ ，

$$\lambda_p = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} = \pi \times \sqrt{\frac{95 \times 10^3}{250}} = 61.2, \textcircled{1}$$

$$\lambda = \frac{\mu H^*}{i} = \frac{4H^*}{d} = \frac{4 \times 1010.57}{36} = 112.3, \textcircled{1}$$

故撑杆是大柔度杆，应该考虑其稳定性。记 I_2 为撑杆横截面惯性矩，由于轴力 $F_{N2} = R$ ，故有

$$n = \frac{F_{cr}}{R} = \frac{EI_2 \pi^2}{H^{*2} R} = \frac{Ed^4 \pi^3}{64H^{*2} R} = \frac{95 \times 10^3 \times 36^4 \times \pi^3}{64 \times 1010.57^2 \times 34659.9} = 2.18 > [n] = 2, \textcircled{3} \quad (4-8)$$

所以撑杆安全。由此看来，选定 $H^* = 1010.57 \text{ mm}$ 是合适的。

结论： 截取圆杆长度 $H^* = 1010.6 \text{ mm}$ ，使之处于铅垂位置，在离右端 $a = 417.9 \text{ mm}$ 处与横梁强行安装。这样制成的结构具有最大的许用荷载 $[q] = 34.35 \text{ kN/m}$ 。

(3) (本小题 2 分) 每块金属板的分布荷载

$$[q_0] = \frac{3200}{1600} = 2 \text{ N/mm}。 \textcircled{1}$$

$$\frac{[q]}{[q_0]} = \frac{34.35}{2} = 17.18。 \quad (4-9)$$

即加上支撑后结构最多可以放置 17 块金属板。①

注意： 求解本题考生可能会采取以下不够完备的方案。可参考如下评分标准：

方案 1 (本方案 6 分) 在 B 端加高度 $H = 1000 \text{ mm}$ 的竖直撑杆，如图 4-d 所示。

这种情况下，协调条件为

$$w_B = w_{Bq} + w_{BR} = -\frac{qL^4}{8EI_1} + \frac{RL^3}{3EI_1} = -\frac{RH}{EA_2}, \textcircled{2}$$

由此可得解为

$$R = \frac{3qL}{8}(1 + \xi)^{-1}。 \textcircled{1}$$

$$\text{式中, } \xi = \frac{3HI_1}{A_2 L^3} = \frac{Hbh^3}{\pi d^2 L^3} = \frac{1000 \times 40 \times 60^3}{\pi \times 36^2 \times 1600^3} = 5.1808 \times 10^{-4}。$$

弯矩最大值出现在固定端，

$$|M|_{\max} = \frac{1}{8} qL^2 \left(\frac{1 + 4\xi}{1 + \xi} \right), \textcircled{1}$$

$$\text{式中, } \frac{1 + 4\xi}{1 + \xi} = 1.0016。$$

容易看出， ξ 体现的是竖杆弹性的影响。上述计算表明，这个影响是非常微小的，忽略它所引起的误差小于 0.2%。这样，强度条件可简单地写为

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{3qL^2}{4bh^2} \leq \frac{\sigma_s}{[n]}。$$

由此可得许用荷载

$$[q] = \frac{4\sigma_s bh^2}{3[n]L^2} = \frac{4 \times 250 \times 40 \times 60^2}{3 \times 2 \times 1600^2} = 9.38 \text{ N/mm}。 \textcircled{1}$$



图 4-d

因此,在这种情况下,最多可以放置 4 块板材。①

方案 2 (本方案 10 分) 在 B 端加上高度大于 $H = 1000 \text{ mm}$ 的竖直撑杆,利用装配应力的方案,如图 4-e 所示。

由于竖杆变形对强度的影响很小,故忽略。设右端支座的支反力为 R ,撑杆比 $H = 1000 \text{ mm}$ 多出 δ ,根据右端 B 处的协调条件可得:

$$-\frac{qL^4}{8EI} + \frac{RL^3}{3EI} = \delta \quad \textcircled{2}$$

故有
$$R = \frac{3}{8}qL + \frac{3EI}{L^3}\delta$$

由此可得左端支反力及支反力偶矩

$$F = qL - R, \quad m = \frac{1}{2}qL^2 - RL$$

由此可知,弯矩峰值出现在 A、K 两个截面上(如图 4-f)。由

$$\frac{F}{L-s} = \frac{R}{s} \quad \text{即} \quad \frac{qL-R}{L-s} = \frac{R}{s},$$

可得
$$s = \frac{R}{q}$$

故有
$$M_A = -\frac{1}{2}qL^2 + RL, \quad \textcircled{1} \quad M_K = Rs - \frac{1}{2}qs^2 = \frac{R^2}{2q} \quad \textcircled{1}$$

最佳的 δ 值,应使 $|M_A| = M_K$,即

$$\frac{1}{2}qL^2 - RL = \frac{R^2}{2q},$$

即
$$R^2 + 2qLR - (qL)^2 = 0$$

可得
$$R = (\sqrt{2} - 1)qL$$

将上式代入 R 的表达式即可得最佳的 δ 值:

$$\delta = \frac{(8\sqrt{2} - 11)qL^4}{24EI} = \frac{(8\sqrt{2} - 11)qL^4}{2Ebh^3}$$

相应的最大弯矩

$$M_{\max} = M_K = \frac{R^2}{2q} = \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right)qL^2 \quad \textcircled{1}$$

可得这种情况下的许用荷载

$$[q] = \frac{\sigma_s bh^2}{3(3 - 2\sqrt{2})[n]L^2} = \frac{250 \times 40 \times 60^2}{3 \times (3 - 2\sqrt{2}) \times 2 \times 1600^2} = 13.66 \text{ N/mm} \quad \textcircled{2}$$

因此在这种情况下,最多可以放置 6 块板材。①

同时,竖杆在 $H = 1000 \text{ mm}$ 的基础上应该增加的长度为

$$\delta = \frac{(8\sqrt{2} - 11) \times 13.66 \times 1600^4}{2 \times 95 \times 10^3 \times 40 \times 60^3} = 17.1 \text{ mm} \quad \textcircled{2}$$

方案 3 (本方案 12 分) 未考虑预应力,但考虑了竖杆左右平移的方案。

若不考虑预应力,如图 4-g 所示,也不考虑立柱的变形,那么 C 处就相当于增加一个铰。显然 C 处支座的支反力 R_C 随着 a 的位置的变动而变化;或者说,这种情况下,可以调整的因素只剩下 a 。

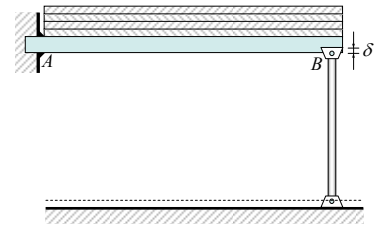


图 4-e

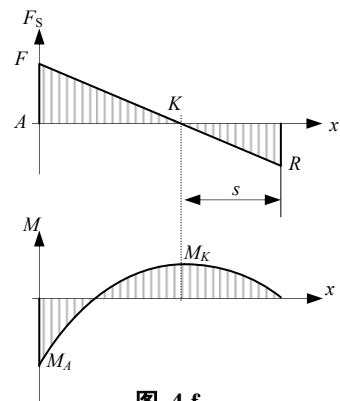


图 4-f

根据 C 处的协调条件可得：

$$-\frac{q(L-a)^4}{8EI} - \frac{(qa)(L-a)^3}{3EI} - \left(\frac{qa^2}{2}\right)\frac{(L-a)^2}{2EI} + \frac{R_C(L-a)^3}{3EI} = 0, \quad (2)$$

由此可得

$$R_C = \frac{q}{8(L-a)}(3L^2 + 2La + a^2)。 \quad (1)$$

弯矩峰值仍出现在 A、K、C 三个截面上。并可得 A 处弯矩

$$M_A = -\frac{1}{2}qL^2 + R_C(L-a) = -\frac{1}{8}q(L^2 - 2La - a^2)。 \quad (1)$$

C 处弯矩

$$M_C = -\frac{1}{2}qa^2。 \quad (1)$$

K 处的弯矩

$$M_K = \frac{R_C^2}{2q} - R_C a。 \quad (1)$$

由于可调因素只有 a，故不可能取 $M_K = -M_A = -M_C$ 。

最佳的 a 值，应使 $M_A = M_C$ (1)，即

$$\frac{1}{8}q(L^2 - 2La - a^2) = \frac{1}{2}qa^2,$$

即 $5a^2 + 2La - L^2 = 0$ 。

故有 $a = \frac{1}{5}(\sqrt{6} - 1)L = 0.2899L = 463.8 \text{ mm}$ 。(2)

注意上式与式 (4-3a) 中的 $a = 417.9 \text{ mm}$ 相比，向中部靠近了约 46 mm。

$$|M_A| = |M_C| = \frac{1}{2}qa^2 = \frac{1}{50}(7 - 2\sqrt{6})qL^2 = 0.0420qL^2。 \quad (1)$$

根据上述结果可以算出，当 $M_A = M_C$ 时，

$$M_K = \frac{1}{100}(7 - 2\sqrt{6})qL^2 < |M_A|。$$

由此可知， $|M_A| = |M_C| = \frac{1}{50}(7 - 2\sqrt{6})qL^2$ 是这种情况下的最大弯矩。

可以看出，在 B 处铰处于 $a = \frac{1}{5}(\sqrt{6} - 1)L$ 位置上时，如果铰再往左移，则 $|M_C|$ 将会增加；如果铰再往右移，则 $|M_A|$ 将会增加。因此， $|M_A| = |M_C| = \frac{1}{50}(7 - 2\sqrt{6})qL^2$ 是 B 处铰移动时所可能产生的最小弯矩。

用弯曲强度条件，

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} = \frac{3(7 - 2\sqrt{6})qL^2}{25bh^2} \leq \frac{\sigma_s}{[n]},$$

便有 $[q] = \frac{25\sigma_s bh^2}{3(7 - 2\sqrt{6})[n]L^2} = \frac{25 \times 250 \times 40 \times 60^2}{3 \times (7 - 2\sqrt{6}) \times 2 \times 1600^2} = 27.89 \text{ N/mm}$ 。(1)

$$\frac{[q]}{[q_0]} = \frac{27.89}{2} = 13.94。$$

这意味着，板材放置 14 块有困难。同时还可以看出，若将铰换为立柱，实际上使 C 处的竖向位移的刚性约束变为弹性约束，许用荷载将再次略略降低，因此最多放置 13 块的结论比较合适。(1)

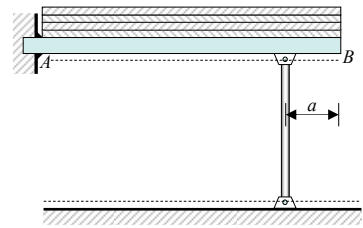


图 4-g