

第九届全国周培源大学生力学竞赛试题

出题学校： 四川大学

本试卷共 5 题 满分 120 分 时间 3 小时 30 分

注意：答卷中各题所得的最后计算结果用分数表示或小数表示均可。

第 1 题 (15 分)

图 1 为某个装在主机组上的旋转部件的简图。四个重量为 G ，厚度为 b ，宽度为 $3b$ ，长度为 L ，弹性模量为 E 的均质金属片按如图的方式安装在轴 OO' 上。在 A 处相互铰结的上下两个金属片构成一组，两组金属片关于轴 OO' 对称布置。两组金属片上方均与轴套 O 铰结，且该轴套处有止推装置，以防止其在轴向上产生位移。两组金属片下方均与 O' 处的轴套铰结，该轴套与轴 OO' 光滑套合。当主机上的电动机带动两组金属片旋转时， O' 处的轴套会向上升起。但轴套上升时，会使沿轴安装的弹簧压缩。弹簧的自然长度为 $2L$ ，其刚度 $k = \frac{23G}{L}$ 。 O 和 O' 处的轴套、弹簧，以及各处铰的重量均可以忽略。

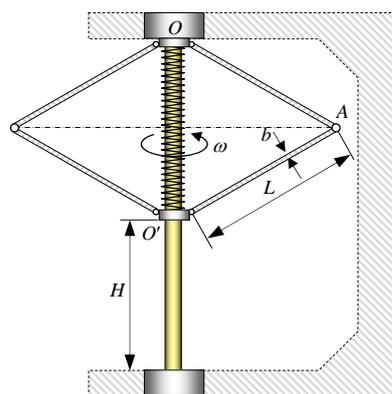


图 1

(1) 暂不考虑金属片的变形，如果在匀速转动时 O' 处轴套向上升起的高度 $H = L$ 是额定的工作状态，那么相应的转速 ω_0 是多少？

(2) 当转速恒定于 ω_0 时，只考虑金属片弯曲变形的影响，试计算图示角度 $\angle OAO'$ 相对于把金属片视为刚体的情况而言的变化量。

第 2 题 (25 分)

在图 2 中，杂技演员推动着演出道具在平坦的水平面上缓慢滚动。道具的外环和内芯都是刚性的， $D_1 = 5D_2$ 。三根直径为 d 、长度相等的实心圆杆布置匀称，其重量可以忽略不计。圆杆两端分别与外环和内芯用球铰连结，且有 $D_2 = 12.5d$ 。圆杆材料可视为理想弹塑性，比例极限为 σ_p ，弹性模量 E 的数值是 σ_p 的 400 倍。内芯有轴承及其他结构，可以保证悬挂在圆心处的重物始终保持着竖直悬垂的状态，而且不会与圆杆相撞。不考虑可能存在的间隙。

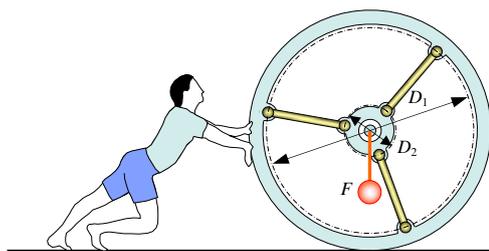


图 2

(1) 若要使每根圆杆都不会失稳，安全因数取 n ，重物（包含内芯）的重量 F 最多允许为多大（用 σ_p 、 d 和 n 表示）？

(2) 如果 F 的取值在上小题的许用范围内，内芯的圆心位置会不会因为圆杆变形而在滚动过程中产生微小的波动？试证明你的结论。

(3) 在保持原结构和构件的形式不变（例如，不允许将实心圆杆改为空心圆杆），连接方式不变，安全因数不变，不减小外环外径，不增加材料用量，不更换材料的前提下，能否重新设计和制作这一道具，使 F 在第 (1) 小题所得到的许用值得到提高？如果你认为这个设想可以实现， F 的许用值最多能提高多少？

第 3 题 (25 分)

小明和小刚有一个内壁十分光滑的固定容器，他们已经知道这个容器的内壁是一条抛物线绕着其对称轴旋转而得到的曲面。如何确定这条抛物线的方程，是小明和小刚想要解决的问题。他们手里还有一根长度为 400 mm 的同样光滑的均质直杆 AB ，能不能借助这根杆件来做这件事呢？数次将这根杆件随意放入容

器之中时，他们意外发现，尽管各次放入后杆件滑动和滚动的情况都不一样，但最终静止时与水平面的夹角每次基本上都是 45° ，如图 3 所示。小明兴奋地认为，由此就可以确定抛物线方程了。小刚对此表示怀疑，他把杆水平地放在容器里，杆照样静止了下来。他认为，说不定杆的平衡状态有很多，利用这根杆件来确定抛物线方程的想法不可靠。小明有些懊丧，一赌气把那根静止的水平杆拨弄了一下，那根杆立刻滑动起来，最终又静止在 45° 的平衡角度上。小刚再次拨弄这根杆，杆运动一番后，仍然回到 45° 的平衡角度上。两人就此进行了激烈的争论，反复的讨论和细致的演算；甚至还找了好几根长短不一的均质杆来进行实验验证。

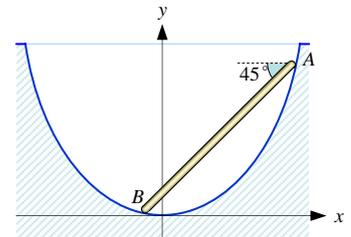


图 3

(1) 试以杆的轴线与水平面的夹角 α ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$) 为参数，推导出杆件所有可能的平衡位置。

(2) 试确定这条抛物线的方程。

(3) 试分析静止在这个容器内的各种光滑均质杆，在什么情况下受到扰动之后还能回到初始的平衡角度上，什么情况下不能。

第 4 题 (30 分)

图 4 是一个吊装设备的示意图。水平平面内的直角刚架由塑性材料的实心圆杆制成，其两个短杆的端面 A 和 G 牢固地固定在竖直的刚性壁上。吊装的重物一直不变，但可以吊挂在刚架的任意部位。已知刚架各部分圆杆横截面的直径均为 d ，其他尺寸如图所示。材料的弹性模量为 E ，泊松比 $\nu = 0.25$ 。不考虑刚架的自重。

(1) 由于重物的作用，圆杆的 A 截面最上点处会产生沿着 AB 杆轴线方向上的线应变。尽管吊装的重物没有变化，但由于吊挂的位置不同，这个应变的数值也是不同的；无须证明，在所有可能的数值中，必定有一个极大值 ε_{\max} 。试用 ε_{\max} 表示出重物及挂钩的总重量 F 。

(2) 在出现这个极大值 ε_{\max} 时，有人直接将 $E\varepsilon_{\max}$ 作为在相应吊挂情况下 A 截面上危险点的屈服强度准则的相当应力。这样做行吗？为什么？

(3) 在图示 AB 区段的中截面 J 处，如果要利用电测法测算出在各种吊挂情况下该截面的全部内力，同时要求应变片要用得尽可能地少，效果要尽可能地好，在理论上应该贴多少个应变片？应在该截面外圆的何处粘贴？沿着什么方向粘贴？如何利用这些应变片的读数来求得 J 截面上各个内力的数值？

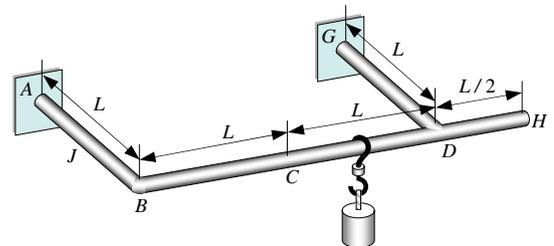


图 4

第 5 题 (25 分)

在收拾整理第 3 题中所用的光滑均质杆时，小刚不小心将一根杆件滑落在地上。小明“当心”的话还未说出口，就被杆件撞击地面时的现象所吸引，感觉与自己的想象并不一致。两人找出几根材质不同但长度均为 $2L$ 的杆件，让它们在高度为 $2L$ 处与铅垂线成 θ ($0 \leq \theta < 90^\circ$) 角无初速地竖直落下，并与固定的光滑水平面碰撞，如图 5 所示。

(1) 某根杆 AB 自由下落的倾角 $\theta = 30^\circ$ 。若在碰撞刚结束的瞬时，质心 C 的速度恰好为零，那么，碰撞时的恢复系数 e 为多大？

(2) 另一根杆（也记其为 AB ）自由下落的倾角 $\theta = 45^\circ$ ， A 端与地面发生完全非弹性碰撞。在碰撞后杆 AB 刚达到水平位置的瞬时，质心 C 的速度为多少？

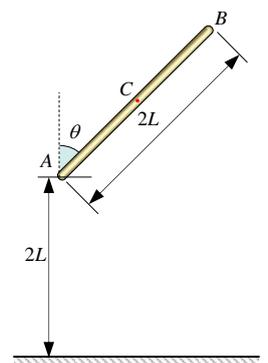


图 5