

第八届全国周培源大学生力学竞赛试题

出题学校：清华大学

满分 120 分 时间 3 小时 30 分钟

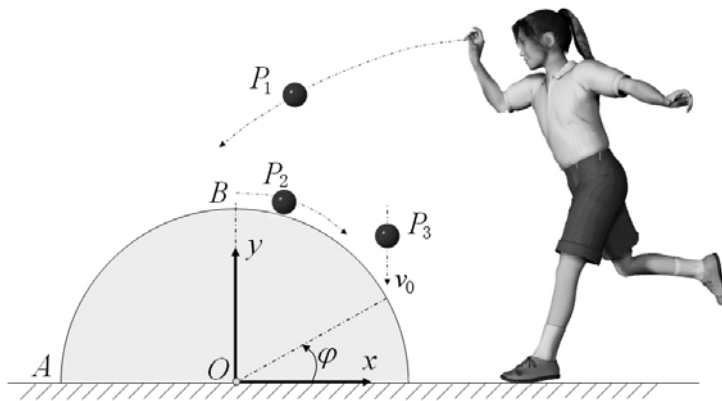
一、看似简单的小试验（30 分）

某学生设计了三个力学试验，其条件和器材很简单：已知光滑半圆盘质量为 m ，半径为 r ，可在水平面上左右移动。坐标系 Oxy 与半圆盘固结，其中 O 为圆心， x 轴水平， y 轴竖直。小球 P_i ($i=1,2,3$) 的质量均为 m 。重力加速度 g 平行于 y 轴向下，不考虑空气阻力和小球尺寸。每次试验初始时刻半圆盘都处于静止姿态。

(1) 如果她扔出小球 P_1 ，出手的水平位置 $x_0 \geq r$ ，但高度、速度大小和方向均可调整，问小球 P_1 能否直接击中半圆盘边缘最左侧的 A 点？证明你的结论（6 分）。

(2) 如果她把小球 P_2 从半圆盘边缘最高处 B 点静止释放，由于微扰动小球向右边运动。求小球 P_2 与半圆盘开始分离时的角度 φ （12 分）。

(3) 如果她让小球 P_3 竖直下落，以 v_0 的速度与半圆盘发生完全弹性碰撞（碰撞点在 $\varphi = 45^\circ$ 处），求碰撞结束后瞬时小球 P_3 与半圆盘的动能之比（12 分）。



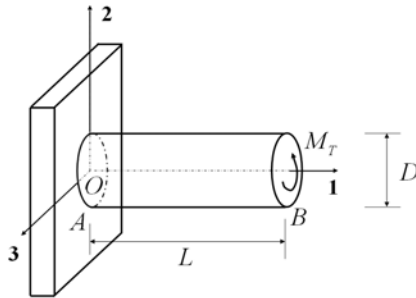
二、组合变形的圆柱体（20分）

圆柱 AB 的自重不计，长为 L ，直径为 D ，材料弹性模量为 E ，泊松比为 ν ，剪切屈服应力为 τ_s 。其中圆柱 A 端固定， B 端承受引起 50% 剪切屈服应力的扭矩 M_T 作用。

(1) 求作用于圆柱上的扭矩 M_T （6分）。

(2) 应用第三强度理论（最大剪应力理论），求在圆柱 B 端同时施加多大的轴向拉伸应力而不产生屈服（6分）。

(3) 求问题（2）情况下圆柱体的体积改变量（8分）。



三、顶部增强的悬臂梁（30分）

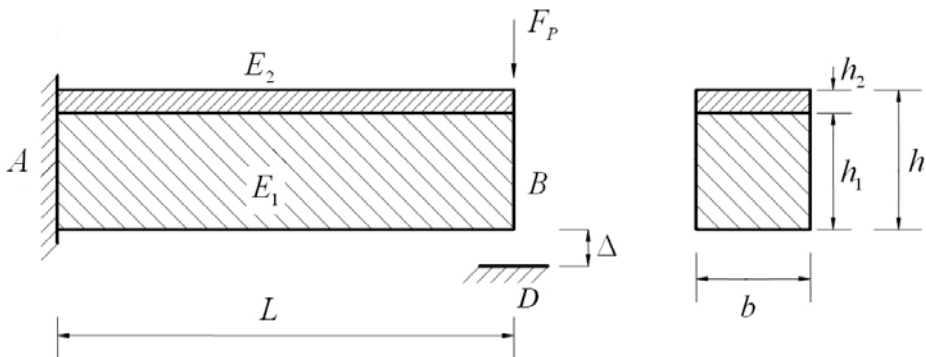
有一模量为 E_1 的矩形截面悬臂梁 AB ， A 端固定， B 端自由。梁长为 L ，截面高度为 h_1 ，宽度为 b 。梁上表面粘着模量为 $E_2 = 2E_1$ 的增强材料层，该层高度 $h_2 = 0.1h_1$ ，长度和宽度与梁 AB 相同。工作面 D 距离 B 端下表面高度为 Δ 。在 B 端作用垂直向下的载荷 F_P 。不考虑各部分的自重。

(1) 求组合截面中性轴的位置（6分）。

(2) 求使梁 B 端下表面刚好接触 D 台面所需的力 F_P （8分）。

(3) 求此时粘接面无相对滑动情况下的剪力（6分）。

(4) 计算梁的剪应力值并画出其沿梁截面高度的分布图（10分）。



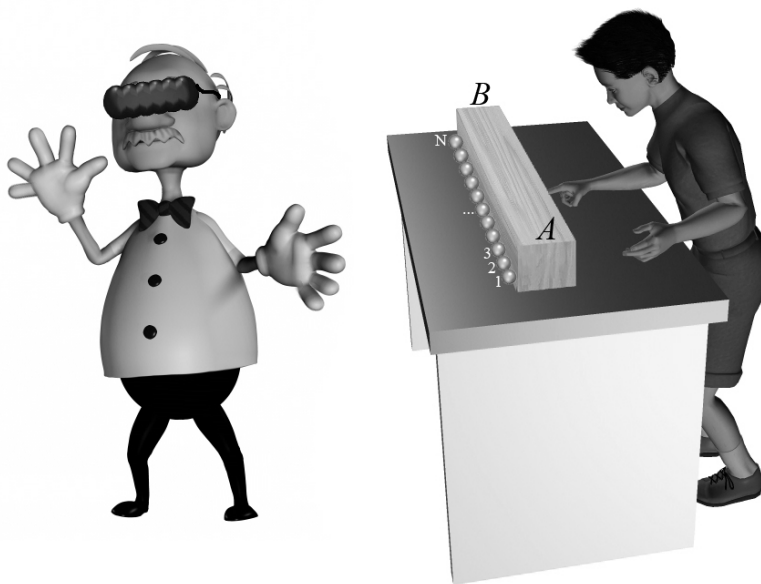
四、令人惊讶的魔术师（20分）

一根均质细长木条 AB 放在水平桌面上，已知沿着 AB 方向推力为 F_1 时刚好能推动木条。但木条的长度、重量和木条与桌面间的摩擦因数均未知。

魔术师蒙着眼睛，让观众把 N 个轻质光滑小球等间距地靠在木条前并顺序编号（设 N 充分大），然后如图在任意位置慢慢用力推木条，要求推力平行于桌面且垂直于 AB 。当小球开始滚动时，观众只要说出运动小球的最小号码 n_{\min} 和最大号码 n_{\max} ，魔术师就能准确地说出推力的作用线落在某两个相邻的小球之间。

魔术师让观众撤去小球后继续表演，观众类似前面方式在任意位置推动木条，只要说出刚好能推动木条时的推力 F_2 ，魔术师就能准确地指出推力位置。

- （1）简单说明该魔术可能涉及的力学原理（4分）。
- （2）如何根据滚动小球的号码知道推力作用在哪两个相邻小球之间（12分）？
- （3）如果观众故意把 F_2 错报为 $\frac{1}{2}F_2$ ，魔术师是否有可能发现（4分）？



五、对称破缺的太极图（20分）

某宇航员在太空飞行的空闲时间，仔细地从一个均质薄圆板上裁出了半个太极图形，并建立了与图形固结的坐标系 Oxz 。

他惊奇地发现：虽然该图形不具有对称性，但仍具有很漂亮的几何性质：惯性矩 $I_x = I_z$ 。他怀疑上述性质是否具有普遍性，于是随意地将 Oxz 坐标系绕 O 点转动 α 角，得到新的坐标系 $Ox'z'$ ，仍然发现 $I_{x'} = I_{z'}$ 。

接着他发现该图形在太空失重情况下不可能绕 z 轴平稳地旋转。看到手边正好有一些钢珠，质量分别为 $m_i = \frac{1}{16}m \times i$ ($i = 1, 2, \dots, 16$)，其中 m 是半太极图形的质量，他想尝试把钢珠粘在图形上……

(1) 试证明该图形 $I_x = I_z = I_{x'} = I_{z'}$ 是否成立（10分）。

(2) 不考虑钢珠的尺寸和粘接剂的质量，是否可能在某处粘上一颗钢珠后，图形就能平稳地绕 z 轴旋转？简要说明理由（10分）。

