

## 第八届全国周培源大学生力学竞赛试题参考答案

### 一、看似简单的小试验（30分）

- (1) 小球  $P_1$  不可能直接击中 A 点，证明见详细解答。
- (2) 小球  $P_2$  与圆盘开始分离时的角度  $\varphi = \arcsin(\sqrt{3}-1) \approx 47^\circ$ 。
- (3) 碰撞结束后瞬时小球  $P_3$  与半圆盘的动能之比为 5: 4。

### 二、组合变形的圆柱体（20分）

- (1)  $M_T = \frac{1}{32} \pi D^3 \tau_s$ 。
- (2) 在柱 B 端同时施加  $\sigma = \sqrt{3} \tau_s$  的轴向拉伸应力不产生屈服。
- (3) 圆柱体的体积改变量  $\Delta V = \frac{1}{4} \sigma \pi D^2 L (1 - 2\nu) / E$ 。

### 三、顶部增强的悬臂梁（30分）

- (1) 组合截面中性轴的位置:  $y_C = 0.592h_1$ ; (形心为  $z_C = 0$ ,  $y_C = 0.592h_1$ )。
- (2) 使梁 B 端下表面刚好接触 C 台面所需的竖向力为  $F_p = 0.4E_1bh_1^3\Delta / L^3$ 。
- (3) 不使增强材料层下表面与梁上表面相对滑动的剪力为  $F_Q^{\text{top}} = 0.28E_1bh_1^2\Delta / L^2$ 。
- (4) 梁的剪应力为  $\tau = \frac{3}{2}E_1\Delta(y_C^2 - y^2) / L^3$ , 沿梁截面高度的分布图见详细解答。

### 四、令人惊讶的魔术师（20分）

- (1) 力学原理: 沿不同方向推动木条时, 需要的推力大小不同, 木条运动的方式也不同: 沿 AB 推, 推力  $F_1$  最大, 木条平动; 垂直 AB 在不同位置推动木条, 木条绕不同的点转动, 且推力  $F_2$  的大小、转动位置均与推力位置有关。
- (2) 根据滚动小球的号码信息, 推力位置位于  $[num, num+1]$  号小球之间, 且

$$num = \frac{2n_{\max}^2 - Q^2}{4n_{\max} - 2Q} \text{取整。 (注意 } Q = N, \text{ or } N-1, \text{ or } N+1 \text{ 均算正确)。}$$

- (3) 设  $F_2 / F_1 = \eta$ ,  $\eta \in [0, 0.414)$  不可能出现。当  $\eta \in [0.414, 0.828)$  时, 观众如果故意把  $F_2$  错报为  $\frac{1}{2}F_2$ , 一定会被魔术师发现。若  $\eta \in [0.828, 1]$  时, 观众故意报错不会被发现。

### 五、对称破缺的太极图（20分）

- (1)  $I_x = I_z = I_{x'} = I_{z'}$  成立, 见详细解答。
- (2) 在  $x = -r, z = 0$  处粘上质量为  $\frac{1}{4}m$  的配重, 图形就可以在空中绕 Z 轴稳定地转动。

## 详细解答及评分标准

总体原则：

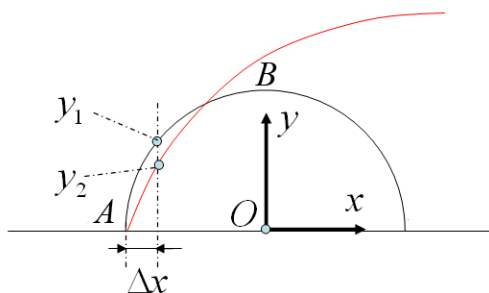
- (1) 计算题的某一小问，只要最后结果正确且有适当的步骤，就给全分。
- (2) 如结果不正确，则参考具体的评分标准。
- (3) 如结果不正确且方法与参考答案不一样，各地自行统一酌情给分。
- (4) 证明题需要看过程。

### 一、看似简单的小试验（30分）

【解】：(1) 小球出手后开始作抛物线运动，可以证明，在题目所给条件下，小球击中 A 点之前，一定会和圆盘边缘上其它点碰撞，即**小球不可能直接击中 A 点**。

证明：如果想求出抛物线与圆的交点表达式，会很复杂。下面采用很简单的方法。

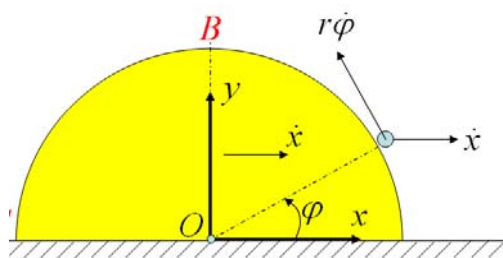
圆盘的边界轨迹为  $x^2 + y^2 = r^2$ ，在 A 点右边的  $x = -r + \Delta x$  处（设  $\Delta x$  为一阶小量），圆盘的高度为  $(-r + \Delta x)^2 + y_1^2 = r^2$ ， $y_1^2 = 2r\Delta x - \Delta x^2$ ，略去高阶小量，即  $y_1 \sim \Delta x^{0.5}$ ；



小球的抛物线轨迹方程一定可以写为  $y = -a(x-b)^2 + c$  的形式（a、b、c 与初始条件有关且均为正值）。在  $x = -r + \Delta x$  处，抛物线的高为  $y_2 = -a(-r + \Delta x - b)^2 + c$ 。假设抛物线过 A 点，则有  $0 = -a(-r - b)^2 + c$ 。因此有  $y_2 = 2a(r+b)\Delta x - a\Delta x^2$ ，略去高阶小量，即  $y_2 \sim \Delta x$ 。

即在 A 点之前（ $x = -r + \Delta x$  处），抛物线的高度是 1 阶小量，而圆盘的高是 0.5 阶小量，所以圆盘比抛物线高。因此小球在击中 A 点前一定会先与圆盘上某点发生碰撞，不可能直接击中 A 点。

- (2) 建立惯性坐标系与初始时刻的  $Oxy$  重合。



可以用不同的方法求解。系统水平方向动量守恒

$$m\dot{x} + m(\dot{x} - r\dot{\varphi} \sin \varphi) = 0$$

(1-1)

1分

结论 3 分

证明方法不限。  
结论错误，0分；  
结论正确且能够证明，3分；  
结论正确但证明不完善，1分。

系统机械能守恒

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}r\dot{\varphi}\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}^2) + mgr\sin\varphi = mgr \quad (1-2)$$

1分

拆开系统，对小球由水平方向质心运动定理

$$m\ddot{x} = -N\cos\varphi \quad (1-3)$$

1分

由(1-1)和(1-2)得到

$$\dot{x} = -\frac{1}{2}r\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad \dot{\varphi}^2 = \frac{4(1-\sin\varphi)g}{(2-\sin^2\varphi)r} \quad (1-4)$$

得到速度或角速度，1分

对(1-4)中的速度和角速度求导有

$$\ddot{x} = -\frac{1}{2}r\ddot{\varphi}\sin\varphi - \frac{1}{2}r\dot{\varphi}^2\cos\varphi, \quad \ddot{\varphi} = -\frac{2\cos\varphi(2+\sin^2\varphi-2\sin\varphi)g}{(2-\sin^2\varphi)^2r} \quad (1-5)$$

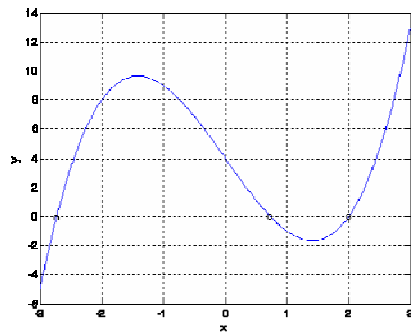
得到加速度或角加速度，2分

把(1-5)代入(1-3)有

$$N = \frac{mg(4+\sin^3\varphi-6\sin\varphi)}{(2-\sin^2\varphi)^2} \quad (1-6)$$

得到压力与角度的正确表达式，3分

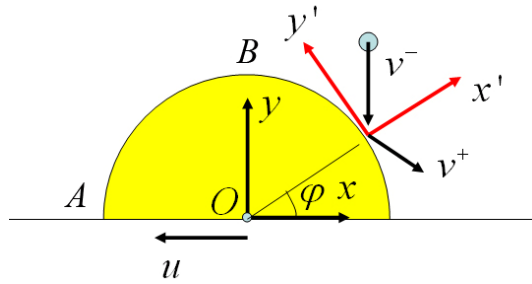
下面求小球正好脱离圆盘的位置，即求  $4+\sin^3\varphi-6\sin\varphi=0$  的解。设  $x=\sin\varphi$ ， $y=x^3-6x+4$ 。一般情况下三次方程的解不好求，但是本题比较好求。把  $x=-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$  代入，可以看出  $x$  在  $(-3, -2)$  之间、 $(0, 1)$  之间以及  $x=2$  处有三个解（见下图）。



根据三角函数的特点， $(0, 1)$  之间的解有意义。注意到  $x=2$  是一个解，所以设  $x^3-6x+4=(x-2)(x^2+\zeta x-2)$ ，容易求出  $\zeta=2$ ，问题变为求  $x^2+2x-2=0$  在  $(0, 1)$  之间的解，为  $x=\sqrt{3}-1$ ，因此  $\varphi = \arcsin(\sqrt{3}-1) \approx 47^\circ$  时，小球与圆盘压力为零，正好分离。

得到角度的正确表达式，3分

(3) 为了求出碰撞后的速度，可以用不同的方法。以碰撞点处的法向  $n$  和切向  $\tau$  为坐标轴构成  $x'y'$ 。



碰撞前小球的绝对速度在  $x'y'$  坐标系中为  $v_{x'y'}^- = (-v_0 \sin \varphi, -v_0 \cos \varphi)^T$ 。设碰撞后小球的绝对速度为  $v_{x'y'}^+ = (v_{x'y'}^{+n}, v_{x'y'}^{+\tau})^T$ 。

碰撞时以小球为研究对象，由于圆盘光滑，小球切向速度不变有

$$v_{x'y'}^{+\tau} = -v_0 \cos \varphi \quad (1-7)$$

法向速度满足恢复系数关系，设圆盘以速度  $u$  后退运动，在  $x'y'$  坐标系中为  $u_{x'y'}^+ = (-u \cos \varphi, u \sin \varphi)^T$ 。根据碰撞定义，有

$$e = \frac{v_{x'y'}^{+n} + u \cos \varphi}{v_0 \sin \varphi} \quad (1-8)$$

同时根据系统水平动量守恒，有

$$u = v_{x'y'}^{+n} \cos \varphi - v_{x'y'}^{+\tau} \sin \varphi \quad (1-9)$$

联立 (1-7), (1-8), (1-9), 解出

$$v_{x'y'}^{+n} = \frac{v_0 \sin \varphi (e - \cos^2 \varphi)}{1 + \cos^2 \varphi}, \quad u = \frac{v_0 (1 + e) \sin \varphi \cos \varphi}{1 + \cos^2 \varphi} \quad (1-10)$$

小球的动能:  $T_1 = \frac{1}{2} m (v_{x'y'}^{+n})^2 + \frac{1}{2} m (v_{x'y'}^{+\tau})^2$ , 半圆盘的动能:  $T_2 = \frac{1}{2} m u^2$

代入  $e=1$  和  $\varphi=45^\circ$ , 所以碰撞后瞬时小球的动能与半圆盘的动能之比为

$$T_1 : T_2 = 5 : 4 \quad (1-11)$$

## 二、组合变形的圆柱体 (20分)

**【解】:** (1) 在扭矩作用下，圆柱外表面产生最大剪应力，其值为 50% 是剪切屈服应力。由扭转内力和应力公式计算得到

$$\tau = \frac{M_T}{W_p} = \frac{M_T}{\frac{\pi D^3}{16}} = \frac{\tau_s}{2} \quad (2)$$

$$M_T = \frac{\pi D^3}{32} \tau_s \quad (2-1)$$

(2) 在圆柱外表面有最大应力，在剪切和轴向拉伸作用下，平面应力状态的主应力表达式为

2分,可以带入角度。如果坐标系选取不同,或符号不同,只要正确即可。下面类似处理

2分

1分

2分+2分

3分

2分

4分

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}, & \sigma_2 = 0, & \sigma_3 = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \end{cases}$$

3分

应用第三强度理论（最大剪应力强度理论），有

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

(2-2) 1分

以剪应力  $\tau = \frac{\tau_s}{2}$  和拉伸应力  $\sigma$  代入(2-2)式，屈服将发生在当拉伸应力  $\sigma$  达到

$$\tau_{\max} = \tau_s = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\tau_s}{2}\right)^2}$$

(2-3)

故，

$$\sigma = \sqrt{3}\tau_s$$

(2-4)

2分

(3) 根据圆柱扭转变形后截面保持平面的假定，扭转作用不引起体积改变。仅考虑轴向拉伸作用下的体积改变量，利用功的互等定理，建立另一均匀压强  $p$  作用下的圆柱体（考虑小变形）。圆柱轴向拉伸力为  $F = \sigma\pi D^2 / 4$ ，与另一圆柱的伸长变形  $\Delta L(p)$  功共轭，由功的互等关系，

方法不限制，

$$F \cdot \Delta L(p) = -p\Delta V(F)$$

(2-5)

1分

式中， $\Delta L(p) = \varepsilon_1 L$ 。均匀压强  $p$  作用下的圆柱体，三个主应力均为：

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$$

1分

轴向伸长应变为

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] = -\frac{p}{E}(1 - 2\nu)$$

(2-6)

2分

代入(2-5)式，有： $-\frac{FpL}{E}(1 - 2\nu) = -p\Delta V(F)$ ，

从而得到体积改变量：

$$\Delta V(F) = \frac{FL}{E}(1 - 2\nu) = \frac{\sigma\pi D^2 L}{4E}(1 - 2\nu)$$

(2-7)

4分

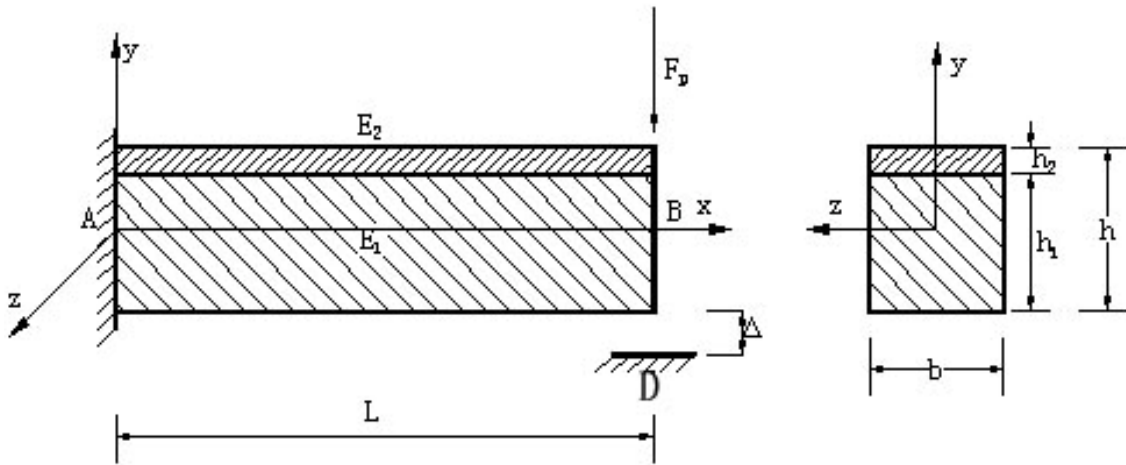
### 三、紧密结合的复合梁（30分）

【解】

注意：计算结果保留小数点后2位即可以。答案中保留了小数点后3位。

答案如包含中间过程的参数，只要正确，也同样给分。

(1) 建立如下坐标系（如果坐标系不同，只要结论正确，不扣分）



先计算折算面积和截面几何性质，换算为同样模量  $E_1$  材料的 T 形截面，求截面形心的位置，由于截面对称，故  $z_c = 0$ ，仅求  $y_c$ 。

1 分

$$y_c = \frac{\frac{h_1^2 b}{2} + 2bh_2 \left( h_1 + \frac{h_2}{2} \right)}{h_1 b + 2bh_2} = \frac{0.71h_1}{1.2} = 0.592h_1$$

(3-1) 5 分

(2) 叠合梁粘接共同工作，先计算折算面积和截面几何性质，换算为同样模量  $E_1$  材料的 T 形截面，

$$\begin{aligned} I_z &= \frac{bh_1^3}{12} + bh_1 \left( (0.592 - 0.5)h_1 \right)^2 + \frac{2bh_2^3}{12} + 2bh_2 \left( (1 - 0.592)h_1 + 0.5h_2 \right)^2 \\ &= (0.083 + 0.008)bh_1^3 + 0.167b(0.1)^3 h_1^3 + 0.2bh_1^3 (0.458)^2 \\ &= (0.091 + 0.0 + 0.042)bh_1^3 = 0.133bh_1^3 \end{aligned}$$

(3-2) 4 分

由梁端位移计算：  $\Delta = \frac{F_p L^3}{3E_1 I_z}$ ，得到所需的竖向力为：

$$F_p = \frac{3E_1 I_z \Delta}{L^3} = \frac{0.4E_1 bh_1^3 \Delta}{L^3}$$

(3-3) 4 分

(3) 求此时不使增强材料层下表面与梁上表面相对滑动的剪力。

由沿梁长度方向的剪力为常数，有  $F_Q = F_p$ ，得到梁上表面的剪应力为

1 分

$$\begin{aligned} \tau^{\text{top}} &= \frac{F_Q S}{bI_z} = \frac{\frac{3E_1 I_z \Delta}{L^3} S}{bI_z} = \frac{3E_1 \Delta}{bL^3} \left( 2bh_2 \left[ (h_1 - y_c) + \frac{1}{2}h_2 \right] \right) \\ &= \frac{3E_1 \Delta}{L^3} (0.2h_1 [0.408h_1 + 0.05h_1]) = 0.28 \frac{E_1 h_1^2 \Delta}{L^3} \end{aligned}$$

(3-4) 4 分

乘以梁上表面的面积，即为剪力值：

$$F_Q^{\text{top}} = \tau^{\text{top}} bL = \frac{0.28 E_1 b h_1^2 \Delta}{L^2}$$

(3-5) 1分

(4) 计算剪应力的分布公式:

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{F_Q S}{b I_z} = \frac{F_Q}{b I_z} \left[ b(y_c - y) \left( y + \frac{1}{2}(y_c - y) \right) \right] \\ &= \frac{F_Q}{b I_z} \left[ \frac{b}{2} (y_c - y)(y_c + y) \right] = \frac{F_Q}{2 I_z} (y_c^2 - y^2) \\ &= \frac{3 E_1 \Delta}{2 L^3} (y_c^2 - y^2) = \frac{3 E_1 \Delta}{2 L^3} ((0.592 h_1)^2 - y^2) \end{aligned}$$

(3-6) 4分,最后三个等号中的任意一个均可以

获得剪应力为二次曲线分布,讨论:

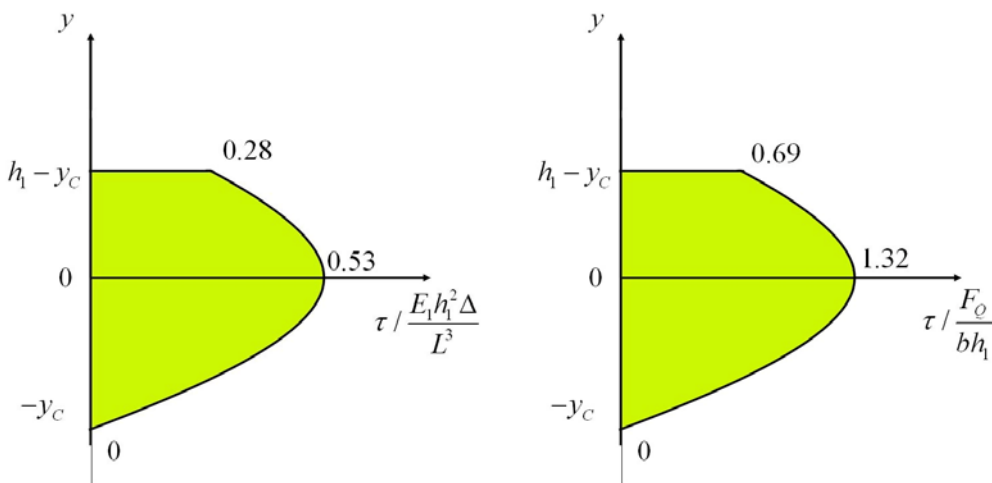


图 2 分,定性对即可。两个结果都可以。

在梁的下表面,即  $y = -y_c$ , 有  $\tau = 0$

1分

在梁的中性轴处有最大剪应力,即  $y = 0$ , 有

$$\tau_{\max} = \frac{F_Q (0.592 h_1)^2}{2 \times 0.133 b h_1^3} = 1.32 \frac{F_Q}{b h_1} \quad \text{或} \quad \tau_{\max} = 0.53 \frac{E_1 h_1^2 \Delta}{L^3}$$

(3-7) 1分

在梁的上表面,即  $y = h_1 - y_c$ , 有

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{F_Q}{2 I_z} (y_c^2 - (h_1 - y_c)^2) = \frac{F_Q}{2 I_z} (2 h_1 y_c - h_1^2) \\ &= \frac{F_Q (2 \times 0.592 - 1) h_1^2}{2 \times 0.133 b h_1^3} = 0.69 \frac{F_Q}{b h_1} \quad \text{或} \quad \tau = 0.28 \frac{E_1 h_1^2 \Delta}{L^3} \end{aligned}$$

(3-8) 2分

#### 四、令人惊讶的魔术师 (20分)

**【解】:** (1) 魔术的力学原理: 沿不同方向推动木条时, 需要的推力大小不同, 木条运动的方式也不同: 沿 AB 推, 推力  $F_1$  最大, 木条平动; 垂直 AB 在不同位置推动木条, 木条绕不同

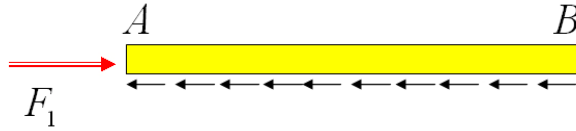
木条平动 2分; 木条转动时推力与位置有关, 2分。

的点转动，且推力  $F_2$  的大小、转动位置均与推力位置有关。

(2) 设木条质量为  $M$ ，长度为  $L$ ，与桌子摩擦因数为  $\mu$ 。若沿 AB 推，木条平动，临界推力为

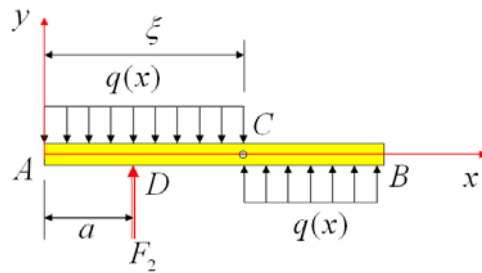
$$F_1 = \mu Mg \quad (4-1)$$

1 分



(侧视图)

建立坐标系  $Axy$ ，设垂直推 AB 的力  $F_2$  与 A 端距离为  $a$  (由对称性，设推力在左半部分)，杆绕 C 点转动，AC 距离为  $\xi$ 。



(俯视图)

木条垂直推时  
受力图，2 分

对均质杆，对桌面压力分布为  $q(x) = \frac{Mg}{L}$ ，垂直杆推时，由  $y$  方向力的平衡和对 D 点的力矩平衡关系，有

$$F_2 - \int_0^{\xi} q(x) dx + \int_{\xi}^L q(x) dx = 0 \quad (4-2)$$

1 分

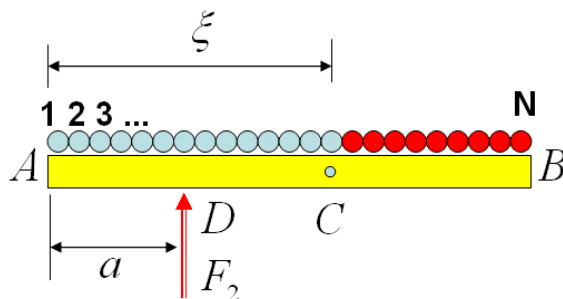
$$\int_0^{\xi} q(x)(x-a) dx + \int_{\xi}^L q(x)(x-a) dx = 0 \quad (4-3)$$

1 分，对 A 点  
取矩也可以。

解出

$$\xi = a + \frac{\sqrt{2(L-a)^2 + 2a^2}}{2}, \text{ 或 } a = \frac{(2\xi^2 - L^2)}{2(2\xi - L)} \quad (4-4)$$

3 分，任意一个  
均可以



以已知  $N$  个小球平均分配在长度为  $L$  的区间 (不一定相互紧挨着)，分为  $Q$  段 (注)。木条绕  $C$  点运动时，AC 部分小球运动，CB 部分小球不动。如果  $n_{\min} = 1$ ， $n_{\max} < N$ ，则表示作用力在左边；如果  $n_{\min} > 1$ ， $n_{\max} = N$ ，则表示作用力在右边；如果  $n_{\min} = 1$ ， $n_{\max} = N$ ，

注：按不同的  
摆法， $N$  个小  
球可能把木条  
平均分为  $Q$   
段， $Q=N$ 、 $N$   
 $-1$ 、 $N+1$ ，均  
可以。



则表示作用力在中间。

设作用力在左边，则  $n_{\min} = 1$ ，杆转动后 AC 部分  $n$  个小球运动，有

$$n = (n_{\max} - n_{\min} + 1) = n_{\max} \quad (4-5)$$

则 AC 长度  $\xi = nL/Q$ ，把  $\xi$  和  $n$  代入 (4-4)，得

$$num = \frac{2n_{\max}^2 - Q^2}{4n_{\max} - 2Q} \quad (Q = N, \text{ or } N-1, \text{ or } N+1) \quad (4-6)$$

4 分

由于小球运动的号码是整数，所以上式还需要取整数。最后得到作用力的位置在  $[num, num+1]$  号码的小球之间。

(3) 沿 AB 方向的推力  $F_1 = \mu Mg$ ；垂直 AB 推时，从 (4-2) 和 (4-3) 中还可以解出

$$F_2 = \frac{\mu Mg(-L-2a) + \sqrt{(L-2a)^2 + L^2}}{L} \quad (4-7)$$

2 分

把  $F_1$  与  $F_2$  的比值算出来，设  $\frac{F_2}{F_1} = \frac{\sqrt{(L-2a)^2 + L^2} - (L-2a)}{L} = \eta$ ，可以得到

$$\eta \in [\sqrt{2} - 1, 1] = [0.414, 1] \quad (4-8)$$

即  $\eta \in [0, \sqrt{2} - 1) = [0, 0.414)$  是不可能出现的。因此魔术师根据  $\eta$  值的范围就可以肯定观众的数据是否有问题。若  $\eta \in [\sqrt{2} - 1, 2\sqrt{2} - 2) = [0.414, 0.828)$  时，观众故意报错一半就会被发现。若  $\eta \in [2\sqrt{2} - 2, 1] = [0.828, 1]$  时，观众故意报错一半不会被发现，

2 分，不必考虑区间的开闭。

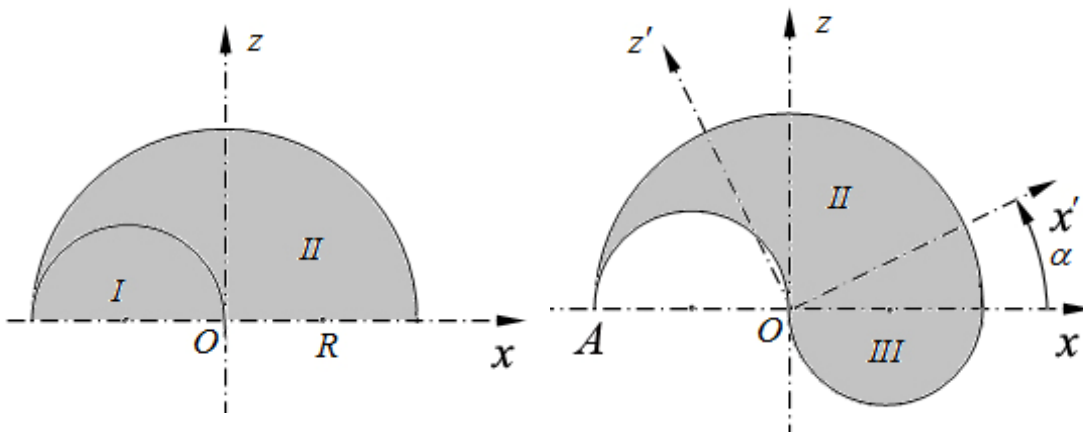
### 五、对称破缺的太极图 (20 分)

【解】：(1) 由于惯性矩和惯性积的定义：

$$I_z = \int_A x^2 dA, \quad I_x = \int_A z^2 dA, \quad I_{xz} = \int_A x \cdot z dA \quad (5-1)$$

2 分

直接积分不方便，下面采用简便的方法处理。为便于后面的分析，可以认为半太极图是这样得到的：把半圆裁成 I、II 两部分，再把 I 旋转后当作 III 与 II 拼接。



对半圆，因  $z$  轴为半圆的对称轴，故有

$$I_{xz} = I_{xz}^{(I)} + I_{xz}^{(II)} = 0, \quad I_x = I_x^{(I)} + I_x^{(II)}, \quad I_z = I_z^{(I)} = I_z^{(II)} \quad (5-2)$$

且易知

$$I_x = I_z \quad (\text{半圆}) \quad (5-3)$$

其中  $I_x^{(i)}, I_z^{(i)}, I_{xz}^{(i)}$  ( $i = I, II$ ) 类似 (5-1) 中的定义，只是积分的区域分别为  $A_I$  和  $A_{II}$ 。

从半圆到半太极图的变换，是将  $I$  中的点  $(x, z)^{(I)}$  变为  $III$  中的  $(-x, -z)^{(III)}$ ，由于变换前后  $x \cdot z$ ， $x^2$ ， $z^2$  的符号均保持不变。于是有

$$I_x^{(III)} = I_x^{(I)}, \quad I_z^{(III)} = I_z^{(I)}, \quad I_{xz}^{(III)} = I_{xz}^{(I)} \quad (5-4)$$

因此有

$$I_{xz} = I_{xz}^{(III)} + I_{xz}^{(II)} = I_{xz}^{(I)} + I_{xz}^{(II)} \equiv 0 \quad (\text{半太极图}) \quad (5-5)$$

2分

$$I_x = I_x^{(III)} + I_x^{(II)} = I_x^{(I)} + I_x^{(II)}$$

$$I_z = I_z^{(III)} + I_z^{(II)} = I_z^{(I)} + I_z^{(II)}$$

且有

$$I_x = I_z \quad (\text{半太极图})$$

2分

在太极图中，由坐标旋转变换下的转轴公式：

$$\begin{cases} I_{x'} = \frac{I_x + I_z}{2} + \frac{I_x - I_z}{2} \cos 2\alpha - I_{xz} \sin 2\alpha \\ I_{z'} = \frac{I_x + I_z}{2} - \frac{I_x - I_z}{2} \cos 2\alpha + I_{xz} \sin 2\alpha \end{cases}$$

2分

知：

$$I_{x'} = I_{z'} = I_x = I_z$$

2分

(2) 图形能够绕  $z$  轴稳定旋转的前提： $z$  轴过质心，且为主轴。

**第一种解法（简单的解法）：**假设图形粘上钢珠后可以绕  $z$  轴转动，考虑惯性力的平衡，把对称部分去掉后，只留下钢珠和右边的小圆，且小圆的直径为  $r$ ，质量为  $0.5m$ 。钢珠与小圆之间

位置 2分

的连接为不计质量的杆。

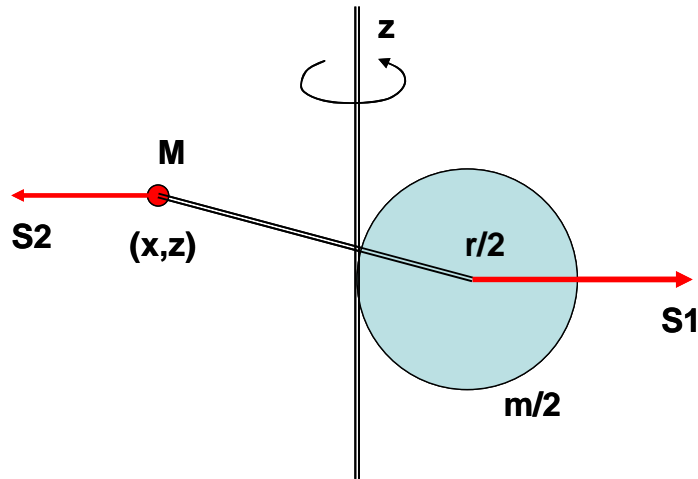


图 2 分

很明显，惯性力与 z 轴垂直，由惯性力矩平衡，钢珠必在 x 轴上，即  $z = 0$ 。

Z 方向位置 1

由惯性力平衡：  $S_1 + S_2 = 0$

$$S_1 = \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{2} r\right) \omega^2, \quad S_2 = Mx\omega^2$$

即  $Mx = -\frac{1}{4} mr$ ，考虑到在 AO 之间没有地方可以粘钢珠，只有在尖点处 ( $x = -r$ )，粘上

X 方向位置 2  
分  
质量 3 分

$M = \frac{1}{4} m$  的钢珠，可以绕 z 轴稳定地转动。

(注：如果已经得到  $Mx = \frac{1}{4} mr$ ，但是最后答案不同，如  $x = \frac{1}{2} r$ ， $M = \frac{1}{2} m$ ，因为这时没有办法用胶水把钢珠粘在这个空档位置，扣 2 分)

**第二种解法 (重新计算分数):**

在不加配重时，对均质半圆有  $r_c = 4r / (3\pi)$ 。采用面积法求重心。

对 I 部分，质量为  $m_I = \frac{1}{4} m$ ，质心坐标为  $r_{CI} = (-\frac{1}{2} r, 0, \frac{2}{3} r / \pi)^T$ ；

对 I+II 部分，质量为  $m_{I+II} = m$ ，质心坐标为  $r_{CI+II} = (0, 0, \frac{4}{3} r / \pi)^T$ ；

对 III 部分，质量为  $m_{III} = \frac{1}{4} m$ ，质心坐标为  $r_{CIII} = (\frac{1}{2} r, 0, -\frac{2}{3} r / \pi)^T$ ；

因此图形的质心为

$$r_c = \frac{m_I r_{CI} + m_{I+II} r_{CI+II} + m_{III} r_{CIII}}{m} = \left(\frac{1}{4} r, 0, r / \pi\right)^T \quad (5-6)$$

设配重质量为 M，位置为  $(x, 0, z)^T$ ，则图形加配重后新的质心为

$$r_c = \left(\frac{mr+4Mx}{4(m+M)}, 0, \frac{mr+\pi Mz}{\pi(m+M)}\right)^T \quad (5-7)$$

根据 z 轴过质心的要求，有

$$mr + 4Mx = 0 \quad (5-8)$$

2 分

类似前面惯性矩的计算方法，太极图形与配重的转动惯量分别为

$$J_{O_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mr^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}mr^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}mr^2 \end{bmatrix}, \quad J_{O_2} = \begin{bmatrix} Mz^2 & 0 & -Mxz \\ 0 & M(x^2 + z^2) & 0 \\ -Mxz & 0 & Mx^2 \end{bmatrix}$$

图形加上配重后,

$$J_O = J_{O_1} + J_{O_2} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}mr^2 + Mz^2 & 0 & -Mxz \\ 0 & \frac{1}{2}mr^2 + M(x^2 + z^2) & 0 \\ -Mxz & 0 & \frac{1}{4}mr^2 + Mx^2 \end{bmatrix}$$

$z$  要求是主轴, 则

$$xz = 0$$

(5-9)

2分

现在同时考虑 (5-8)、(5-9), 以及  $M = m_i = \frac{1}{16}m \times i$ , ( $i = 1, 2, \dots, 16$ ), 可以得出

$z = 0, x = -\frac{4r}{i}$ 。注意到在半太极图上的左边尖点 (设为 A 点) 到 0 点之间都没有地方可以加

配重, 因此只能在  $z = 0, x = -r$  (尖点处) 加配重, 且配重的质量是  $M = m_4 = \frac{1}{4}m$  时, 可以

位置 3 分  
质量 3 分

绕  $z$  轴稳定地转动。